This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Digitized by Google

Digitized by Google

Quadratische Reciprocitätsgesetze

in algebraischen Zahlkörpern.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

einer

hohen philosophischen Fakultät

der

Georg-Augusts-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Gottfried Rückle
aus Rödelheim b. Frankfurt a. M.

Göttingen 1901.
Druck der Dieterich'schen Universitäts-Buchdruckerei.
(W. Fr. Kaestner).

Digitized by Google

Math 1609.01.3

Hayes fund.

Tag der mündlichen Prüfung: 22. Januar 1901.
Referent: Herr Prof. Dr. Hilbert.

Digitized by Google

Reciprocitätsgesetze haben schon lange in der Zahlentheorie eine grosse Rolle gespielt. Gauss nennt in seinen „disquisitiones arithmeticae" das Reciprocitätsgesetz für quadratische Reste das „Theorema fundamentale" dieser Theorie, und der Umstand, dass er sechs auf ganz verschiedenen Grundgedanken beruhende Beweise dieses Satzes gab, zeigt, wie hoch der grosse Mathematiker die Bedeutung dieses Theorems anschlug. Man bewundert in diesem klassischen Werk die scharfsinnigen Methoden und eleganten Schlüsse in der Beweisführung, doch gestalten sich diese bei der Bestätigung scheinbar ganz einfacher Aussagen schon auffallend schwierig. Die Entwicklung der klassischen Zahlentheorie macht den Eindruck sprunghaften Fortschritts, man vermisst in ihr die Stetigkeit des Aufbaus. Nach der Einführung des Körperbegriffs durch Kronecker und Dedekind ist der Zahlentheorie eine systematische Weiterentwicklung verbürgt. Der Zahlkörper steht in den letzten Decennien im Mittelpunkt arithmetischer Forschung, er hat einen engen Zusammenhang mit anderen Disciplinen der Mathematik, mit der Functionentheorie, der Algebra etc., vermittelt und wesentlich dazu beigetragen, der höheren Arithmetik eine führende Rolle unter diesen anderen Wissenschaften zu verschaffen.

Speciell für die Theorie der Potenzreste in beliebigen Rationalitätsbereichen haben sich die relativ-Abel'schen Körper als besonders fruchtbar erwiesen. So wird die Theorie der quadratischen Reste im Gebiete der ganzen rationalen Zahlen und das zugehörige Reciprocitätsgesetz erst klar und durchsichtig unter Zuhülfenahme der Theorie des quadratischen Zahlkörpers. Aehnlich wird die Theorie der $l$ten Potenzreste im regulären Kreiskörper erst nach Einführung des Kummer'schen Körpers einer eleganten Darstellung fähig.

Zum Studium der quadratischen Reciprocitätsgesetze in algebraischen Zahlkörpern ist nach dem Gesagten offenbar der relativquadratische Körper nötig, dessen Theorie der Betrachtung der

Digitized by Google

quadratischen Formen mit beliebigen algebraischen Koefficienten gleichkommt.

Der relativ-quadratische Körper ist ein specieller relativ-cyclischer Körper, deren Theorie im Falle, dass der Relativgrad eine Primzahl ist, für beliebige Grundkörper von Hilbert[1]) entwickelt worden ist. Es handelt sich um vier Fundamentalsätze, die für die gesamte Körpertheorie von weitgehender Bedeutung sind. Es ist an der citierten Stelle auch auf die Ausnahmestellung der Zahl 2 als Relativgrad hingewiesen, die für den Aufbau einer allgemeinen Theorie erhebliche Komplikationen in sich trägt. Die Theorie des relativ-quadratischen Körpers erweist sich von der Konstitution des Grundkörpers abhängig, sodass eine einheitliche Darstellung nicht möglich ist. Eine naturgemässe Einteilung der Untersuchung wird durch die Sätze über relativ-cyclische Körper geliefert, wenn man versucht, die dort ausgesprochenen Thatsachen auf den Relativgrad 2 zu übertragen.

Ausführliche Untersuchungen über den relativ-quadratischen Körper sind von Hilbert[2]) gemacht. Die erste der beiden Arbeiten entwickelt die Theorie vollkommen für den Fall, dass der Grundkörper nebst seinen sämtlichen conjugierten Körpern imaginär ist, die Klassenanzahl eine ungerade Zahl ist. Die zweite Arbeit giebt Anweisungen für den Aufbau der Theorie unter allgemeineren Voraussetzungen und enthält Sätze, die denen der ersten Arbeit entspreehen.

Der Verfasser hat sich bemüht, unter Verwendung der allgemeinen Methoden der ersten Arbeit, die in der zweiten Arbeit ausgesprochenen Sätze zu beweisen und durch Betrachtung einiger specieller Zahlkörper zu bestätigen.

§ 1. *Die Ausnahmestellung der 2 als Primzahl-Relativgrad in der Theorie der relativ-cyclischen Körper vom Primzahl-Relativgrade.*

Die Theorie der relativ-cyclischen Körper vom Relativgrade l, wo l eine ungerade Primzahl ist, hat Hilbert aufgestellt in seinem Bericht, der für die Folge abgekürzt H. B. citiert werden soll; von besonderer Wichtigkeit für das Folgende sind die Sätze 91 und 94.

---

1) D. Hilbert, Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper (Bd. IV der deutschen Mathematikervereinigung), pag. 271—279.

2) I. Math. Annalen, Bd. 51, pag. 1—127. II. Göttinger Nachrichten 1898.

Digitized by Google

Es sei k ein beliebiger Körper vom Grade m, k', k'', ... $k^{(m-1)}$ seien seine $m-1$ conjugierten Körper. Sei ferner

$$\theta^l + \alpha_1 \theta^{l-1} + \cdots + \alpha_l = 0 \tag{1}$$

eine Gleichung l-Grades mit Koefficienten, die Zahlen des Körpers k sind. Der Rationalitätsbereich $K(\theta)$ einer Wurzel dieser Gleichung definiert einen Zahlkörper vom Grade $M = l.m$, der ein Relativkörper l-Grades zu k ist.

Die l Wurzeln der Relativgleichung (1) seien

$$\theta,\ \theta',\ \ldots\ \theta^{(l-1)}.$$

Haben diese die besondere Eigenschaft, durch l Relativsubstitutionen

$$1,\ S,\ S^2,\ \ldots\ S^{l-1}, \qquad (S^l = 1) \tag{2}$$

aus einer unter ihnen hervorzugehen, d. h. bilden die Substitutionen eine Gruppe der besonderen Art (2), so heisse der Körper $K(\theta)$ „relativ-cyclisch" zu k, eben weil die Relativgruppe eine cyclische ist.

Wie schon erwähnt, sind die Sätze 91 und 94 in H. B., die für diese Relativkörper gelten, falls l eine ungerade Primzahl ist, von besonderer Bedeutung für die folgenden Entwicklungen. Satz 91 definiert ein System von Einheiten des Körpers K, ein sogenanntes „System relativer Grundeinheiten" und beweist dessen Existenz. Es fragt sich nun zunächst, ob die im Beweis zu diesem Satze verwandten Methoden auf den Fall $l = 2$ übertragbar sind, was durch eine Characterisierung der Beweisführung sofort beantwortet werden kann.

Der Beweis stützt sich wesentlich auf eine Anzahlenbeziehung zwischen einem vollständigen System von Grundeinheiten in K und einem solchen in k.

Wenn k ein beliebiger Zahlkörper m Grades ist, der mit seinen $m-1$ conjugierten Körpern zusammen r_1 reelle Körper, r_2 Pare imaginärer Körper aufweist, so ist die Anzahl von Grundeinheiten, denen die im Dirichlet'schen Fundamentalsatz über die Einheiten ausgesprochene Eigenschaft zukommt,

$$r = r_1 + r_2 - 1.$$

Für den Körper K wird diese Zahl

$$R = R_1 + R_2 - 1.$$

Ist nun l ungerade, so gilt allgemein die Relation

$$R + 1 = l(r+1) \tag{3}$$

Digitized by Google

auf deren Existenz die Beweismethode von Satz 91, die sich als ein Ausschaltungsverfahren bezeichnen lässt, basiert.

Ist nun diese Relation (3) für $l = 2$ auch erfüllt? Dies ist keineswegs der Fall.

Es sei übrigens bemerkt, dass das Principielle an der Beweismethode keineswegs an die Beziehung (3) gebunden, nur die speciellen Anzahlen von Einheiten etc., werden dann einfache dem Grundkörper k characterische Zahlen. Ist nun $l = 2$, so möge der relativ-quadratische Körper K definiert sein durch die Quadratwurzel aus einer Zahl μ in k, (μ selbstredend $\gtrless \alpha^2$) die in c von den r_1 reellen Körpern

$$k^{(1)},\ k^{(2)},\ \ldots\ k^{(r_1)}$$

negativ werden möge. Dann ergiebt sich die Anzahl R von Grundeinheiten des Relativkörpers $K(\sqrt{\mu})$ in folgender Weise:

1) Es bestimmen die $r_1 - c$ reellen Körper, in denen $\mu^{(\alpha)} > 0$ ist,

$$2(r_1 - c) \text{ reelle Körper } K^{(\alpha)}.$$

2) Die r_2 Pare imaginärer $k^{(\lambda)}$ bestimmen

$$2r_2 \text{ Pare imaginärer } K^{(\lambda)}.$$

3) Die c reellen Körper in denen $\mu^{(\alpha)} < 0$ ist, bestimmen

$$c \text{ Pare imaginärer Körper } K^{(\alpha)}.$$

Danach wird

$$\begin{aligned} R &= 2(r_1 - c) + 2r_2 + c - 1 \\ &= 2(r_1 + r_2) - c - 1. \end{aligned}$$

Und es wird

$$R + 1 < 2(r_1 + r_2)_1 < 2(r+1).$$

Das heisst Satz 91 ist mit seinen sämtlichen Schlussfolgerungen nicht übertragbar auf den Fall $l = 2$, wenigstens nicht allgemein.

Es ist aus dem Vorstehenden evident, dass alle Zahlen, für die $c = 0$ ist, relativ-quadratische Körper definieren, denen alle Eigenschaften zukommen, welche in den Sätzen 91—94 ausgesprochen sind. Definiert also der $K(\sqrt{\mu})$ doppelt soviel reelle Körper unter den $2m$ conjugierten wie der Körper k nebst seinen conjugierten k', $\ldots$ $k^{(m-1)}$, so sind die citierten Sätze übertragbar.

Diese Bemerkungen reichen zur Einteilung der allgemeinen Theorie hin.

Digitized by Google

Einteilung der Theorie des relativ-quadratischen Körpers.

I. Körper k, welche nur Zahlen mit der Eigenschaft $c = 0$ enthalten. Dann muss $r_1 = 0$ sein, d. h. der Grundkörper nebst seinen sämtlichen conjugierten Körpern ist imaginär.

II. Körper, die mit ihrem $m-1$ konjugierten s reelle Körper darstellen: $k^{(1)}$, $k^{(2)}$, ... $k^{(s)}$ reell. Die Theorie hat in diesem Fall die bei der Untersuchung der Körper I entwickelten Methoden sachgemäss zu übertragen, und sich eventuell durch einschränkende Definitionen allgemeinen Aussagen dieser Entwicklungen anzupassen.

Was die Körper I anbelangt, so ist der relativ-quadratische Körper untersucht und erschöpfend dargestellt von Hilbert in Bd. 51 der Math. Annalen, wo noch die zweite Voraussetzung gemacht ist, dass die Klassenanzahl des Grundkörpers k eine ungerade Zahl ist.

Diese zweite Voraussetzung fliesst aus der Aussage des Fundamentalsatzes 94 in H. B., wo die Klassenanzahl als durch den Relativgrad l teilbar nachgewiesen wird, falls Relativkörper l-Grades existieren, die die Relativdiscriminante 1 haben, die um die Analogie mit der Riemann'schen Functionentheorie hervorzuheben, „unverzweigt“ [1]) genannt werden. Es kommt dann darauf an, im Falle gerader Klassenanzahl solche unverzweigte Körper aufzustellen. Den allgemeinen Existenzbeweis im Falle $l = 2$, $h = 2$ hat Hilbert[2]) geführt.

Ein einleitender Paragraph 2 soll zunächst im Anschluss an die beiden oft citierten Arbeiten Hilbert's solche vorbereitende Definitionen und Sätze für den relativ-quadratischen Körper bringen, die von den speciellen Voraussetzungen über den Grundkörper k frei sind.

§ 2[3]). *Vorbereitende Definitionen und Sätze für den relativ-quadratischen Körper.*

Es sei k ein beliebiger Zahlkörper vom Grade m, die zu k conjugierten Körper seien k', k'', ... $k^{(m-1)}$. Die Anzahl der Idealklassen sei gleich h.

Die nächstliegende Aufgabe ist, das Legendre'sche Symbol für

1) H. II., pag. 3.
2) H. II, § 10 ff.
3) H. I., § 1—13.

Digitized by Google

den Restcharacter einer Zahl auf die Körpertheorie zu übertragen. Genau so wie in der elementaren Zahlentheorie die Eigenschaften der quadratischen Charactere wesentlich auf dem Fermat'schen Satz beruhen, stützen sich die Symbole in der Körpertheorie auf den Fermat der Zahlkörpertheorie.

Def. 1. Sei $\mathfrak{p}$ ein zu 2 primes Primideal des Körpers k, α eine beliebige zu $\mathfrak{p}$ prime ganze Zahl in k: Dann soll das Symbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ den Wert $+1$ oder -1 haben, je nachdem α congruent dem Quadrat einer ganzen Zahl nach $\mathfrak{p}$ ist oder nicht.

Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges zu 2 und α primes Ideal in k, so möge das Symbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right)$ durch folgende Gleichung definiert sein: $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots \mathfrak{w}$

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right) = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{q}}\right) \cdots \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{w}}\right).$$

Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ beliebige zu 2 prime Ideale in k, und α eine zu $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ prime ganze Zahl in k, so ist offenbar:

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{ab}}\right) = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right)\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right).$$

Von Wichtigkeit für die Auswertung des so definierten Symbols ist der folgende Satz:

Satz 1. „Wenn $\mathfrak{p}$ ein beliebiges zu 2 primes Primideal ist, $n(\mathfrak{p})$ seine Norm, und α eine zu $\mathfrak{p}$ prime ganze Zahl in k, so ist stets

$$\alpha^{\frac{n(\mathfrak{p})-1}{2}} \equiv \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right), \ (\mathfrak{p}).“$$

Eine Folgerung aus diesem Satz ist der folgende:

Satz 2. „Ein vollständiges System von $n(\mathfrak{p})-1$ zu $\mathfrak{p}$ primen und nach $\mathfrak{p}$ incongruenten Zahlen zerfällt in 2 Teilsysteme, von denen das eine aus $\frac{n(\mathfrak{p})-1}{2}$ quadratischen Resten nach $\mathfrak{p}$ besteht, das andere aus $\frac{n(\mathfrak{p})-1}{2}$ Nichtresten.“

Diese beiden Sätze beruhen wesentlich auf dem Fermat'schen [1]) Satze der Körpertheorie. Beachtet man die Definition der Norm eines Ideals $\mathfrak{a}$ als Anzahl aller ganzen zu $\mathfrak{a}$ primen und nach $\mathfrak{a}$ incongruenten Zahlen des Körpers k, so fällt die Analogie dieser

1) H. B. pag. 191.

Digitized by Google

beiden Sätze mit zwei entsprechenden der elementaren Zahlentheorie direkt auf.

Sei nunmehr μ eine ganze Zahl in k, die nicht gleich dem Quadrat einer Zahl von k ist, so definiert $\sqrt{\mu}$ zusammen mit den Zahlen von k einen Körper $K(\sqrt{\mu})$, der vom Grade $2m$ und relativ-quadratisch zum Grundkörper k ist.

Im Folgenden sollen kurz die wichtigsten Begriffe definiert werden, die durch die Adjunktion des Relativkörpers $K(\sqrt{\mu})$ eingeführt werden.

Jede Zahl des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ lässt sich offenbar in die Form bringen

$$A = \alpha + \beta\sqrt{\mu}$$

wo α und β Zahlen von k sind. Durch die Substitution

$$S(+\sqrt{\mu} : -\sqrt{\mu}),$$

(der man den cyclischen Character sofort ansieht, $S^2 = 1$) entsteht eine Zahl

$$SA = \alpha - \beta\sqrt{\mu},$$

die zu A relativ conjugirt ist. Das Produkt

$$A.SA = \alpha^2 - \beta^2\mu$$

heisst die Relativnorm von A mit Bezug auf den Grundkörper k und ist offenbar eine Zahl in k. Die Differenz

$$A - SA$$

heisst die Relativdifferente von A in Bezug auf k. Das Quadrat der Relativdifferente

$$(A - SA)^2$$

heisst die Relativdiscriminante von A und ist wiederum eine Zahl in k.

Diese Definitionen übertragen sich ganz naturgemäss auf die Ideale von $K(\sqrt{\mu})$.

Den grössten gemeinschaftlichen Teiler der Relativdifferenten aller ganzen Zahlen von $K(\sqrt{\mu})$ nennt man die Relativdifferente des Körpers K mit Bezug auf k, die ihrer Definition nach die folgende Idealdarstellung erhält:

$$\mathfrak{D} = (A_1 - SA_1,\ A_2 - SA_2 \ldots).$$

Die Relativdifferente $\mathfrak{D}$ ist ein Ideal von $K(\sqrt{\mu})$, dem die be-

Digitized by Google

sondere Eigenschaft zukommt, bei Anwendung der Substitution S ungeändert zu bleiben. Ein solches Ideal heisse ein „ambiges“ Ideal. Da es die Gleichung erfüllt,

$$\mathfrak{P} = S\mathfrak{P},$$

so zeigt eine einfache Betrachtung, dass ambige Ideale stets in ambige Primideale zerfallen. Denn $\mathfrak{P}^2 = \mathfrak{p}$ wird ein Ideal in k, was der Aussage äquivalent ist. Daher der wichtige Satz 3: „Die Relativdifferente $\mathfrak{D}$ eines relativ-quadratischen Körpers enthält alle und nur die Primideale $\mathfrak{p}$, welche ambig sind.“

Dieser Satz gilt allgemein für relativ-cyclische [1]) Körper vom Primzahlgrade; der Beweis gestaltet sich für $l = 2$ besonders einfach.

Das Quadrat der Relativdifferente $\mathfrak{D}$ heisst die Relativdiscriminante des Körpers, die nach Satz 3 ein Ideal in k ist.

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{D}^2 = (A_1 - SA_1,\ A_2 - SA_2,\ \ldots)^2.$$

Sehr wichtig für alle weiteren Entwicklungen ist die Untersuchung der Primfactoren der Relativdiscriminante [2]).

Satz 4. „Es sei $\mathfrak{p}$ ein zu 2 primes Primideal in k; geht dann $\mathfrak{p}$ in der Zahl μ genau zur $a$ten Potenz auf, so enthält die Relativdiscriminante von $K(\sqrt{\mu})$ stets und nur dann den Factor $\mathfrak{p}$, wenn a ungerade ist.“

„Es sei $\mathfrak{l}$ ein Factor von 2, und zwar gehe $\mathfrak{l}$ in 2 zur l-Potenz auf, während μ den Factor $\mathfrak{l}$ in der a-Potenz enthalten möge. Dann fällt die Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ dann und nur dann zu $\mathfrak{l}$ prim aus, wenn

$$\mu \equiv \alpha^2, \quad (\mathfrak{l}^{2l+a})$$

wo α eine ganze Zahl in k ist.“

Ein specieller Fall von Satz 4 ist von besonderer Wichtigkeit:

Satz 5. „Wenn $\mu \not\equiv \alpha^2$ eine beliebige zu 2 prime ganze Zahl in k ist, so wird die Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ dann und nur dann zu 2 prim, wenn

$$\mu \equiv \alpha^2, \quad (2^2)$$

ist, wo α eine ganze Zahl des Körpers k ist.“

Ein Relativkörper $K(\sqrt{\omega})$ heisse „unverzweigt“ in Bezug auf den Grundkörper k, wenn seine Relativdiscriminante gleich 1 ist.

1) H. B. Satz 93.

2) Hilbert, Math. Ann. 51, Satz 4 und 5.

Digitized by Google

Die Frage nach der Existenz unverzweigter Körper wird dann wesentlich Satz 5 zu berücksichtigen haben.

Fernerhin ist die Zerlegung der Ideale von k im Relativkörper $K(\sqrt{\mu})$ zu untersuchen.

Das Kriterium für die Zerlegbarkeit der Ideale von k in einem Körper $K(\sqrt{\mu})$ lässt sich wiederum durch ein Symbol darstellen, welches durch eine geringe Verallgemeinerung des quadratischen Restsymbols entsteht.

Satz 6 und 7. „Die in der Relativdiscriminante aufgehenden Primideale zerfallen im Körper $K(\sqrt{\mu})$ in das Quadrat eines Primideals von K. Ein weder in 2 noch in μ enthaltenes Primideal $\mathfrak{p}$ zerfällt in K in 2 verschiedene Primideale $\mathfrak{P}$ und $S\mathfrak{P}$ oder nicht, je nachdem μ quadratischer Rest oder Nichtrest im Körper k nach $\mathfrak{p}$ ist.“ Nun lässt sich das Symbol $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{w}}\right)$, wo $\mathfrak{w}$ ein beliebiges Ideal in k ist, in folgender Weise zum Zerlegungssymbol verallgemeinern: „$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{w}}\right)$ soll sein gleich $+1$, -1, 0, jenachdem $\mathfrak{w}$ in $K(\sqrt{\mu})$ in 2 verschiedene Primideale zerlegt wird, unzerlegt bleibt oder gleich dem Quadrat eines Ideals wird.“

Diese merkwürdige Uebereinstimmung des Restsymbols mit dem Zerlegungssymbol zeigt die Einwirkung des relativ-quadratischen Körpers auf die Resttheorie im Grundkörper.

Betrachtet man speciell die unverzweigten Relativkörper, so giebt es keine Ideale in k, welche Quadrate von Idealen in $K(\sqrt{\omega})$ sind, d. h. Symbolwerte $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{w}}\right) = 0$ kommen nicht vor. Dann deckt sich das Restsymbol vollkommen mit dem Zerlegungssymbol, was die Vermutung nahe legt, dass diese Relativkörper mit der Relativdiscriminante 1 von besonderer Bedeutung für das Studium der Reciprocitätsgesetze des Grundkörpers sind.

Zum Aufbau der Theorie des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ ist von besonderer Tragweite das Hilbert'sche [1]) Normenrestsymbol, dessen Definition nunmehr folgen soll.

Das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)$.

„Es sei $\mathfrak{w}$ irgend ein Primideal in k, und es seien ν und μ beliebige ganze Zahlen in k, nur dass μ nicht gleich dem Quadrat

1) Hilbert, Math. Ann. 51, § 8—10 ff.

Digitized by Google

einer Zahl von k ist: wenn dann ν nach $\mathfrak{w}$ der Relativnorm einer ganzen Zahl des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ congruent ist, und wenn ausserdem für jede höhere Potenz von $\mathfrak{w}$ eine ganze Zahl A in $K(\sqrt{\mu})$ gefunden werden kann, sodass

$$\nu \equiv N(A), \ (\mathfrak{w}^e), \qquad (e > 1)$$

so heisse ν ein Normenrest des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ nach $\mathfrak{w}$. In jedem andern Falle heisse ν ein Normennichtrest des $K(\sqrt{\mu})$ nach $\mathfrak{w}$.

Das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)$ sei dann gleich $+1$ oder -1, jenachdem ν Normenrest- oder Normennichtresteigenschaft hat. Fällt insbesondere μ gleich dem Quadrat einer Zahl von k aus, so sei stets $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)$ (für beliebiges ν und $\mathfrak{w}$) $= +1$.

Das so definierte Symbol ist eindeutig bestimmt, es ist nur der Werte $+1$ und -1 fähig.

Was die für das Normenrestsymbol geltenden Sätze und Rechnungsregeln anbelangt, was insbesondere die Beziehung zu den schon definierten Symbolen betrifft, so sei auf die §§ 8—10 der Hilbert'schen Abhandlung verwiesen. Auch wegen der Definitionen der „Einheitenverbände" und „Complexe" sei auf die §§ 11 und 12 dieser Arbeit hingewiesen. Diese Begriffe sollen bei ihrer Verwendung nur ganz kurz erklärt werden.

Zum Schlusse dieses vorbereitenden Paragraphen soll noch Satz 18, der Schlusssatz von Teil 1 bei Hilbert, citiert werden:

„Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s$ irgend s ganze Zahlen in k, welche die Bedingung erfüllen, dass kein aus denselben zu bildendes Produkt $\prod \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ gleich dem Quadrat einer Zahl von k wird: Es seien ferner $c_1, c_2, \ldots c_s$ nach Belieben vorgegebene Einheiten ± 1; dann gibt es im Körper k stets unendlich viele Primideale, $\mathfrak{p}$, die den Bedingungen genügen:

$$\left(\frac{\alpha_1}{\mathfrak{p}}\right) = c_1, \quad \left(\frac{\alpha_2}{\mathfrak{p}}\right) = c_2, \quad \ldots \quad \left(\frac{\alpha_s}{\mathfrak{p}}\right) = c_s."$$

Der Beweis dieses für gewisse Existenzbeweise unentbehrlichen Satzes stützt sich auf transcendente Methoden.

§ 3. *Aufstellung eines Systems von relativen Grundeinheiten für Körper k von gewisser Beschaffenheit.*

Es werden über die Grundkörper k folgende zwei Voraussetzungen gemacht:

Digitized by Google

I. k sei vom Grade m, k', k'', ... $k^{(m-1)}$ die $m-1$ konjugierten Körper. Unter diesen m Körpern gebe es eine Anzahl s (>0) reeller Körper.

II. Die Klassenanzahl von k sei $h=1$.

Das System relativer Grundeinheiten mit gewissen Eigenschaften wird bei den Untersuchungen über relativ-cyclische Körper von Hilbert aufgestellt. Es handelt sich um den oft erwähnten Satz 91 im Bericht über algebraische Zahlkörper. Der Gang des Existenzbeweises kann als eine Ausschaltungsmethode bezeichnet werden. Für die dort gemachten Voraussetzungen gilt die Relation

$$R+1 = l(r+1).$$

Es werden dann $(l-1)(r+1)$ Einheiten ausgeschaltet, sodass $r+1$ Einheiten restieren, denen die characteristischen dort ausgesprochenen Eigenschaften zukommen. Für die Voraussetzungen der Arbeit I. trifft die Relation $R+1 = 2(r+1)$ zu, es resultieren $r+1 = \frac{m}{2}$ Grundeinheiten, denen specielle in Satz 19 ausgesprochene Eigenschaften anhaften, die sich aus dem allgemeinen Satz 91 direkt ableiten lassen.

Wie steht es nun hier?

Der Grundkörper k hat $r = r_1+r_2-1$ Grundeinheiten, speciell wird bei den hier gemachten Annahmen

$$r = s+\frac{m-s}{2}-1 = \frac{m+s}{2}-1.$$

Nunmehr sei der Relativkörper $K(\sqrt{\mu})$ definiert durch eine Zahl μ $(\gtrless \alpha^2)$, die in c von den s reellen Körpern negativ wird, dann giebt es, wie leicht einzusehen,

$$R = m+s-c-1$$

Grundeinheiten in K. Wendet man nun die vollkommen übertragbare Methode des Satzes 91 hier an, so ergiebt sich ein System von

$$\frac{m+s}{2}-c$$

relativen Grundeinheiten für den Körper $K(\sqrt{\mu})$. Wie früher schon erwähnt, tritt kein Unterschied in der Beweisführung ein, dagegen tritt eine andere Anzahl $\frac{m+s}{2}-c$ auf, die den Uebelstand mit hereinbringt, dass sie ausser dem speciellen s das dem Körper k anhaftet, das ganz specielle c enthält, welches dem will-

Digitized by Google

kürlich vorgegebenen μ eigentümlich ist. Bei den Hilbert'schen Voraussetzungen wird diese Anzahl gleich $\frac{m}{2}$, woraus bei den dort gemachten Voraussetzungen, die allgemeine Bedeutung des Satzes 19 ersichtlich ist, der sich hier, wie folgt, aussprechen lässt:

Satz 1. „Im relativ-quadratischen Körper $K(\sqrt{\mu})$ giebt es ein System von $\frac{m+s}{2} - c$ Einheiten

$$H_1, H_2, \ldots H_{\frac{m+s}{2}-c}$$

von der Beschaffenheit, dass für irgend eine Einheit E in $K(\sqrt{\mu})$ eine Relation besteht

$$E^u = H_1^{u_1} \ldots H_{\frac{m+s}{2}-c}^{u_{\frac{m+s}{2}-c}} [\xi].$$

Hierbei ist u ungerade, die u_i beliebig ganz und rational, $[\xi]$ ist eine Einheit in k und nur dann eine solche in K, wenn μ eine Einheit ist, multipliciert mit dem Quadrat einer Zahl in k. Endlich giebt c an, in wieviel von den s reellen Körpern μ negativ wird."

Auch der Schlusssatz von Satz 19, der eine Unabhängigkeitsbeziehung der relativen Grundeinheiten enthält, gilt vollkommen.

Die in der Annalenarbeit folgenden allgemeinen Sätze beruhen fast ausschliesslich auf diesem System der H_i, es ist selbstredend hier immer die veränderte Anzahl $\frac{m+s}{2} - c$ einzufügen. Zum Verständnis des Folgenden seien zunächst zwei für beliebige Körper k geltende Definitionen nachgetragen.

I. „Wenn $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_r$ ein System von Grundeinheiten in k ist, wenn ferner ε_{r+1} eine in k gelegene Einheitswurzel ist, so soll eine Klasse von Einheiten

$$\varepsilon = \varepsilon_1^{u_1} \varepsilon_2^{u_2} \ldots \varepsilon_{r+1}^{u_{r+1}} \xi^z$$

wo ξ alle Einheiten des Körpers k durchläuft, ein „Einheitenverband" von k heissen. Es giebt dann, wie direkt ersichtlich 2^{r+1} verschiedene Einheitenverbände in k, d. h. bei den Voraussetzungen dieses § 3, $2^{\frac{m+s}{2}}$.

II. „Ist C eine beliebige Klasse in $K(\sqrt{\mu})$, so heisse das System aller Klassen von der Form cC, wo c die Klassen von k durchläuft, ein Komplex des Körpers $K(\sqrt{\mu})$."

Digitized by Google

Wegen der näheren Definitionen über diese beiden Begriffe vergleiche man Abhandlung I, §§ 11 und 12.

Satz 20 von I. spricht die Existenz von $\frac{m+s}{2}-c$ Einheiten in k aus, die in bestimmter Weise alle Einheiten ε dieses Körpers darstellen, welche Relativnormen von Einheiten E in $K(\sqrt{\mu})$ sind. Satz 21 bringt eine Thatsache über den Complexbegriff, die beim Beweise der gleich hier auszusprechenden Sätze 22 und 23 von I. verwandt wird.

Satz 2 aus Satz 22 in I. „Wenn die Anzahl aller ambigen Ideale des $K(\sqrt{\mu})$ gleich 2^t ist, wenn die Relativdiscriminante also t Primideale enthält, wenn ferner die Einheiten ε^* in k, die Relativnormen von Einheiten E^* in K sind, 2^{v^*} Einheitenverbände in k ausmachen, dann ist die Anzahl derjenigen ambigen Complexe C in $K(\sqrt{\mu})$, die aus ambigen Idealen entspringen, genau gleich 2^{a^*}, wo

$$a^* = t+v^*-\frac{m+s}{2}+c-1$$

ist."

Bei Hilbert wird

$$a^* = t+v^*-\frac{m}{2}-1.$$

Für die Voraussetzungen von § 3 gestalten sich die Beweise genau so wie in § 15 der Annalenarbeit, die Endformel erhält durch die veränderte Zahl von relativen Grundeinheiten folgende Gestalt

$$a^* = t+v^*-\frac{m+s}{2}+c-1.$$

Da a^* mindestens $=1$ sein muss, so kann hier genau wie am Schlusse von § 15 geschlossen werden

$$t+v^*-\frac{m+s}{2}+c>0.$$

Diese Ungleichung hat für die Voraussetzungen Hilbert's einen völlig allgemeinen Character und ist daher für viele Schlüsse ein sehr brauchbares Werkzeug. Hier dagegen spielt die Konstitution des Grundkörpers hinein, ein besonderer Uebelstand wird durch das Auftreten des c hereingetragen, denn diese Zahl ist der einzelnen Zahl des Körpers k eigentümlich. Genau so wie § 15 wird auch § 16 übertragen, speciell lautet die durch Satz 23 aus-

Digitized by Google

gesprochene Formel hier

$$a = t+v-\frac{m+s}{2}+c-1.$$

Wo a die Anzahl aller ambigen Complexe von $K(\sqrt{\mu})$ bedeutet, während 2^v definiert ist als die Zahl aller Einheitenverbände von k, welche aus solchen Einheiten von k entspringen, die Relativnormen von Einheiten oder gebrochenen Zahlen des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ sind. Die Zahl aller Einheitenverbände von k ist nach § 11 in Annalen 51 gleich 2^{r+1}, also hier gleich $2^{\frac{m+s}{2}}$, daraus folgt die Relation

$$\frac{m+s}{2} \geqq v^*,$$

sodass die obige Ungleichung lautet

$$t+c>0.$$

Nimmt man hier $c=0$, d. h. betrachtet man nur Relativkörper, die aus Zahlen μ von k entspringen, die in keinem der s reellen Körper negativ werden, so folgt allgemein $t>0$, d. h. die Relativdiscriminante enthält mindestens ein Ideal als Factor. Nennt man Zahlen, für die $c=0$ ist, nach dem Vorschlage Hilbert's „total positiv", so heisst dies: „Eine total positive Zahl kann nie einen unverzweigten relativ-quadratischen Körper bestimmen, unter der Voraussetzung, dass der Grundkörper k ungerade Klassenanzahl hat."

Für die Voraussetzung, dass der Grundkörper nebst allen seinen konjugierten imaginär ist, sind alle Zahlen total positiv, der eben ausgesprochene Satz hat Allgemeingültigkeit, was in Satz 27 der Annalenarbeit ausgesprochen ist.

Der eben ausgesprochene Satz ist als specieller Fall enthalten in dem Fundamentalsatz [1]) über relativ-cyclische Körper vom Primzahlrelativgrade. Alle dort gemachten Voraussetzungen sind erfüllt, denn für eine total positive Zahl besteht die Bedingungsgleichung $R+1 = l(r+1)$ für den Fall $l=2$ zu Recht. In dem citierten Fundamentalsatz wird die Thatsache ausgesprochen, dass ein unverzweigter Relativkörper nur dann existiert, wenn die Klassenanzahl h des Grundkörpers k durch den Relativgrad l teilbar ist, damit stimmt die negative Aussage des speciellen Satzes für $l=2$ überein.

---

1) H. B. Satz 94.

Digitized by Google

Insbesondere sagt Satz 28 in Bd. 51 eine allgemeine Thatsache über die Einheiten der Grundkörper, die nebst den conjugierten imaginär d. h. über die mit lauter total positiven Zahlen aus:

Satz 28. „Jede Einheit, welche dem Quadrat einer ganzen Zahl nach 2^s congruent ist, wird das Quadrat einer Einheit in k."

Sie würde andernfalls einen unverzweigten relativ-quadratischen Körper $K(\sqrt{\varepsilon})$ definieren, dessen Existenz ausgeschlossen ist. Es ist aber sofort ersichtlich, dass die Einheiten und überhaupt die Zahlen mit der in Satz 28 ausgesprochenen Kongruenzeigenschaft in der Frage nach der Existenz unverzweigter Relativkörper eine centrale Rolle spielen, der Grund hierfür liegt in dem Satz über die Faktoren der Relativdiscriminante, insbesondere in Satz 5 der Annalenarbeit.

Nunmehr erhebt sich die wichtige Frage nach den Eigenschaften, die der Grundkörper k mit der Klassenanzahl $h = 1$ erfüllen muss, damit unverzweigte Körper $K(\sqrt{\omega})$ existieren. Die Ungleichung

$$t + v^* - \frac{m+s}{2} + c > 0$$

oder auch

$$t + c > 0$$

sagt aus, dass $c > 0$ sein muss, damit t überhaupt gleich Null werden könne. Es ist dies eine ganz specielle, der einzelnen Zahl von k anhaftende Bedingung; will man zu einer hinreichenden Bedingung gelangen, so muss man eine dem Körper k anhaftende Eigenschaft aufsuchen. Dies geschieht durch eine Erweiterung Hilbert'scher Methoden, die er selbst in der Abhandlung über relativ-Abel'sche Körper angegeben hat.

§ 4.

I. Das Characterensystem einer Zahl und eines Ideals nach Bd. 51 der Annalen. (§§ 17, 18).

II. Die Verallgemeinerung dieses Begriffs für die Voraussetzung von § 3 dieser Arbeit.

Für die den Relativkörper $K(\sqrt{\mu})$ bestimmende Zahl μ sei durchweg die Voraussetzung gemacht, dass sie die Kongruenz

$$\mu \equiv \alpha^2, \quad (2^s)$$

erfüllt, wo α eine ganze Zahl in k ist. Diese Einschränkung ist

Digitized by Google

der Thatsache äquivalent, dass die t in der Relativdiscriminante enthaltenen ambigen Primideale $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \ldots \mathfrak{d}_t$ prim zu 2 sind. Diese Voraussetzung ist insofern keine Beschränkung, als die Erweiterung des Geschlechtsbegriffs der Untersuchung unverzweigter Relativkörper wegen gemacht wird, die gerade durch Zahlen von der Eigenschaft des μ bestimmt werden.

Definition 1. Zu einer beliebigen von Null verschiedenen Zahl ν des Körpers k gehören bestimmte Werte der t Symbole

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{d}_1}\right), \ldots \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{d}_t}\right),$$

welche nach der Definition des Symbols bestimmte t Einheiten ± 1 bedeuten; diese Einheiten sollen das Characterensystem der Zahl ν im Körper $K(\sqrt{\mu})$ heissen.

Einem Ideal des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ wird nun in folgender Weise ein Characterensystem zugeordnet. Die Relativnorm $N_k(\mathfrak{J})$ wird ein Ideal in k; da $h = 1$ hier vorausgesetzt ist, wird $j = (\nu)$, wo ν eine ganze Zahl des Körpers k ist.

Haben nun die t Symbole

$$\left(\frac{\xi_1, \mu}{\mathfrak{d}_1}\right), \ldots \left(\frac{\xi_1, \mu}{\mathfrak{d}_t}\right)$$

für jede beliebige Einheit ξ den Wert $+1$, so wird $r = t$ gesetzt und die r Einheitswurzeln

$$\left(\frac{\nu_1, \mu}{\mathfrak{d}_1}\right), \ldots \left(\frac{\nu_1, \mu}{\mathfrak{d}_r}\right)$$

als das Characterensystem des Ideals $\mathfrak{J}$ bezeichnet. Tritt dieser specielle Fall nicht ein, so verwendet Hilbert folgende Methode:

Es sei eine Einheit vorhanden, etwa ε_1, für die wenigstens eines der t Symbole

$$\left(\frac{\varepsilon_1, \mu}{\mathfrak{d}_1}\right), \ldots \left(\frac{\varepsilon_1, \mu}{\mathfrak{d}_t}\right)$$

gleich -1 wird, etwa $\left(\frac{\varepsilon_1, \mu}{\mathfrak{d}_t}\right) = -1$.

Sodann werden alle Einheiten ξ_2 betrachtet, für welche

$$\left(\frac{\xi_2, \mu}{\mathfrak{d}_t}\right) = +1$$

wird. Darunter sei nun eine Einheit ε_2, für welche wenigstens

Digitized by Google

eines der $t-1$ Symbole

$$\left(\frac{\varepsilon_2, \mu}{\mathfrak{d}_1}\right), \ldots \left(\frac{\varepsilon_2, \mu}{\mathfrak{d}_{t-1}}\right)$$

gleich -1 wird, etwa $\left(\frac{\varepsilon_2, \mu}{\mathfrak{d}_{t-1}}\right) = -1$.

Sodann werden alle Einheiten ξ_2 zusammengefasst, für welche gilt

$$\left(\frac{\xi_2, \mu}{\mathfrak{d}_t}\right) = +1, \quad \left(\frac{\varepsilon_2, \mu}{\mathfrak{d}_{t-1}}\right) = +1,$$

darauf wird wieder eine Einheit ε_3 ausgesondert, für welche etwa $\left(\frac{\varepsilon_3, \mu}{\mathfrak{d}_{t-2}}\right) = -1$ wird u. s. w.

Dann wird eine Zahl r^* von der Beschaffenheit existieren, dass die Gleichungen für irgend eine Einheit

$$\left(\frac{\xi, \mu}{\mathfrak{d}_t}\right) = +1, \quad \left(\frac{\xi, \mu}{\mathfrak{d}_{t-1}}\right) = +1, \quad \ldots \quad \left(\frac{\xi, \mu}{\mathfrak{d}_{t-r^*+1}}\right) = +1$$

auch stets das Bestehen der $t-r^* = r$ Gleichungen

$$\left(\frac{\xi, \mu}{\mathfrak{d}_t}\right) = +1, \quad \ldots \quad \left(\frac{\xi, \mu}{\mathfrak{d}_{t-r^*}}\right) = +1$$

bedingen. Die so eingeführte Zahl r^* ist offenbar eine dem Körper k und der Zahl μ zugeordnete Grösse, und es wird in der Hilbert'schen Abhandlung gezeigt, dass r stets $\geqq 1$, also r^* stets $< t$ ist.

Nunmehr wird das Characterensystem des Ideals $\mathfrak{J}$ mit der Relativnorm ν in folgender Weise gebildet: Es kann die Zahl ν derartig mit gewissen Einheiten $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_{r^*}$ multipliciert werden, dass das Produkt $\nu \prod_{1-r^*} \varepsilon_i = \bar{\nu}$ die Bedingung erfüllt:

$$\left(\frac{\bar{\nu}, \mu}{\mathfrak{d}_t}\right) = +1 = \left(\frac{\bar{\nu}, \mu}{\mathfrak{d}_{t-1}}\right) = \ldots \left(\frac{\bar{\nu}, \mu}{\mathfrak{d}_{t+r^*+1}}\right) = +1.$$

Die $r = t-r^*$ Einheiten ± 1

$$\left(\frac{\bar{\nu}, \mu}{\mathfrak{d}_1}\right) = [\pm 1] \ldots \left(\frac{\bar{\nu}, \mu}{\mathfrak{d}_{t-r^*}}\right) = [\pm 1]$$

sollen dann das Characterensystem des Ideals $\mathfrak{J}$ heissen. Dasselbe ist durch das Ideal $\mathfrak{J}$ völlig eindeutig bestimmt, was aus der Existenz der für die Einheiten characteristischen Zahl r^* folgt.

Digitized by Google

Aus der Definition des Characterensystems für ein Ideal $\mathfrak{J}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ folgt die des Geschlechts der Idealklassen von $K(\sqrt{\mu})$.

Es folgt aus der Herstellungsweise des Characterensystems direkt die Thatsache, dass einer bestimmten Idealklasse von $K(\sqrt{\mu})$ ein ganz bestimmtes Characterensystem zugeordnet ist.

„Alle Idealklassen, denen das gleiche Characterensystem zugeordnet ist, bilden ein „Geschlecht." Insbesondere sei das Characterensystem mit lauter Einheiten $+1$ das Hauptgeschlecht genannt." Was die genaueren Angaben über Produkte von Geschlechtern etc. anbelangt, so sei auf § 18 bei Hilbert verwiesen.

II. Der Weg zur Verallgemeinerung des Geschlechtsbegriffs ist, wie schon erwähnt, in der zweiten Hilbert'schen Abhandlung angegeben. Es wird zunächst ein Vorzeichensymbol

$$\left(\frac{\nu^{(i)}, \mu^{(i)}}{1}\right) = \left(\frac{\nu, \mu}{1^{(i)}}\right)$$

eingeführt, das der beiden Werte $+$ und -1 fähig ist und folgendermassen definiert ist:

„Wenn wenigstens eine der Zahlen $\nu^{(i)}$ oder $\mu^{(i)}$ positiv ist, so habe das Symbol

$$\left(\frac{\nu^{(i)}, \mu^{(i)}}{1}\right) = \left(\frac{\nu, \mu}{1^{(i)}}\right)$$

den Wert $+1$, sind beide negativ, so sei das Symbol $= -1$."

Das Symbol erstreckt sich auf alle zu μ conjugierten Zahlen $\mu^{(i)}$, welche negativ sind. Es handelt sich daher um c Werte, die $+1$ oder -1 sein können. Bis hierher hängt die Definition noch an dem c, genau so wie vorher das der Zahl μ eigentümliche t im Vordergrund stand. Um das nun verallgemeinerte Characterensystem eindeutig aufzustellen, muss man eine dem Grundkörper individuelle Eigenschaft einführen. Wiederum handelt es sich um eine Einheitenbeziehung.

„Sei ε_1 eine Einheit in k, welche wenigstens in einem der s reellen Körper $k^{(1)}, k^{(2)}, \ldots k^{(s)}$ negativ wird. Sei das System von Einheiten, welche die Eigenschaft haben, dass $\varepsilon^{(s)}$ positiv wird, ξ_2 genannt, ferner möge eine Einheit ε_2 aus ξ_2 in wenigstens einem der reellen Körper $k^{(1)}, \ldots k^{(s-1)}$ negativ werden, etwa in $k^{(s-1)}$. Dann wird in bekannter Weise ein System von ξ_2 betrachtet etc. Existiert nun schliesslich eine feste Zahl $p \leqq s$ von der Eigenschaft, dass alle Einheiten ε für die $\varepsilon^{(1)} > 0$, $\varepsilon^{(2)} > 0$, $\ldots$ $\varepsilon^{(p)} > 0$,

Digitized by Google

auch in den $s-p$ Körpern $k^{(p+1)}, \ldots k^{(s)}$ positiv sind, $\varepsilon^{(p+1)} > 0, \ldots$ $\varepsilon^{(s)} > 0$, so wird die Zahl $s-p$ eine dem r analoge Grösse, die nun im verallgemeinerten Geschlechtsbegriff die wesentliche Rolle spielt. Einer besonders klaren Interpretation wird das $s-p$ bei Einführung eines engeren Idealklassenbegriffs fähig.

Nennt man nämlich nur dann 2 Ideale des Körpers k äquivalent, wenn ihr Quotient eine total positive Zahl in k ist, so giebt es in diesem engeren Sinne 2^{s-p} Idealklassen in k, die Klassenanzahl in diesem Sinne soll mit $\overline{h}$ bezeichnet werden.

Dies lässt sich sehr einfach so zeigen:

Seien $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ 2 Ideale in k, so wird sicherlich

$$\frac{\mathfrak{j}}{\mathfrak{k}} = \frac{\alpha}{\beta} = \gamma$$

sein, denn h ist $= 1$.

Nun kann man sicherlich durch Herausfassen einer Einheit ε aus γ erreichen, dass in der Gleichung $\gamma = \varepsilon\gamma'$, γ' total positiv ist. Nimmt man die Definition des $s-p$ hinzu, so läuft die Frage auf die andere hinaus, wieviel Klassen von Einheiten giebt es in k. Wegen der Bedingung, dass durch p positive conjugierte Einheiten auch die übrigen $s-p$ bestimmt sind, ist dann

$$\overline{h} = 2^{s-p}.$$

Nunmehr wird das Characterensystem für ein Geschlecht gegeben durch die $t+c$ Symbole

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{d}_i}\right) (i \text{ von } 1-t) \text{ und } \left(\frac{\nu, \mu}{1^{(i)}}\right) \quad (i, 1 \ldots c).$$

Bestimmt wird das Characterensystem in eindeutiger Weise durch $r+s-p$ Symbole, was durch folgende Ueberlegung erklärt wird.

Die Zahl $s-p$ wird genau verwandt wie das r. Ein Ideal $\mathfrak{J}$ in $K(\sqrt{\mu})$ möge die Relativnorm $N(\mathfrak{J}) = \nu$ haben, so ist zunächst die Verwendung des r klar. Nunmehr möge das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{1^{(i)}}\right)$, welches übrigens denselben Rechnungsregeln gehorcht wie das Normenrestsymbol (cfr. Hilbert § 8—10), wie folgt verändert werden: Durch Multiplikation von ν mit passenden Einheiten mögen $c-(s-p)$ von den c Symbolen

$$\left(\frac{\overline{\nu}, \mu}{1^{(i)}}\right) = +1, \ldots \left(\frac{\overline{\nu}, \mu}{1^{c-(s-p)}}\right) = +1$$

sein.

Digitized by Google

Dann bilden die $s-p$ Symbolwerte

$$\left(\frac{\bar{\nu}, \mu}{1^{(\omega)}}\right), \cdots \left(\frac{\bar{\nu}, \mu}{1^{(\omega-(s-p)+1)}}\right)$$

mit Werten ± 1 die Erweiterung des Characterensystems, womit dann gleichzeitig der Geschlechtsbegriff modificiert ist.

Mit Hülfe dieses erweiterten Symbols $\left(\frac{\nu, \mu}{\omega}\right)$ lassen sich nun die wichtigen in Annalen 51 ausgesprochenen Sätze auf die hier vorausgesetzten Grundkörper übertragen. Es ist bei dieser Verallgemeinerung die grosse Analogie zwischen dem r und dem $s-p$ aufgefallen, ein wichtiger Unterschied besteht nun allerdings, der in der Folge auftreten wird, die beiden Zahlen zeigen ein ganz reciprokes Verhalten, insbesondere bei der Frage nach unverzweigten Relativkörpern.

§ 5. *Uebertragung einiger Sätze mittels des verallgemeinerten Symbols* $\left(\frac{\nu, \mu}{\omega}\right)$.

Zunächst soll hier analog den Untersuchungen von Hilbert in der ersten Arbeit eine obere Grenze für die Zahl der Geschlechter abgeleitet werden. Es wird sich dabei eine wichtige Ungleichung ergeben für die beiden Zahlen r und $s-p$, die der Ungleichung $t+c>0$ entspricht, aber viel tiefer das Wesen des Grundkörpers berührt.

Es handelt sich zunächst um Uebertragung zweier Hülfssätze, die in § 19 von A. 51 ausgesprochen sind. Die in § 4 der vorliegenden Arbeit ausgesprochene Behauptung, dass unter der Annahme von nur konjugiert imaginären Körpern und ungerader Klassenanzahl r stets $\geqq 1$ wird, ist in § 19 bewiesen. Bei Einführung des verallgemeinerten Symbols $\left(\frac{\nu, \mu}{\omega}\right)$ tritt an Stelle von r, $r+s-p$. Die Uebertragung des Hilbert'schen Beweises führt zu folgenden Relationen:

$$t+v-\frac{m+s}{2}+c \leqq r+s-p.$$

Daraus folgt wegen

$$t+v-\frac{m+s}{2}+c>0$$

die Ungleichung

$$r+s-p>0.$$

Digitized by Google

Da r sicher $\leqq t$ ist für die hier gemachten Voraussetzungen, so muss für $t = 0$, sicher auch $r = 0$ werden, d. h. „unverzweigte Relativkörper müssen $r = 0$ haben. Dies kann aber nach der vorstehenden Ungleichung nur der Fall sein, wenn $s - p > 0$ ist. Daraus folgt der Satz:

„$s - p > 0$ ist eine notwendige Bedingung für die Existenz eines unverzweigten relativ-quadratischen Körpers.“ Dadurch ist die unbefriedigende Bedingung $c > 0$, die sich auf die specielle Zahl μ bezog, auf eine Bedingung transformiert, welche dem Grundkörper k eigentümlich ist. Dadurch wird die principielle Bedeutung des Geschlechtsbegriffs für die Theorie am einzelnen Fall demonstriert.

Genau wie im 2. Satz des § 19 kann hier die Gleichung abgeleitet werden:

g (die Anzahl der Geschlechter) ist

$$g \leqq 2^{t+v-\frac{m+s}{2}+c-1}$$

oder mit Benutzung der beim Beweis des vorigen Satzes verwandten Ungleichung

$$t+v-\frac{m+s}{2}+c \leqq r+s-p$$

$$g \leqq 2^{(r+s-p)-1}.$$

Der Satz über die obere Grenze der Anzahl der Geschlechter bleibt für den verallgemeinerten Fall vollkommen bestehen. Es scheint überhaupt dieser Satz der richtige Ausgangspunkt für die schon dargestellte Verallgemeinerung des Geschlechtsbegriffs zu sein.

§ 6. *Die Ergänzungssätze und das Reciprocitätsgesetz für quadratische Reste im Falle* $h = 1$, $\bar{h} = 2^{s-p}$, $s - p > 0$.

Im Folgenden werden die Ergänzungssätze und das Reciprocitätsgesetz für Hilbert's Voraussetzungen in Bd. 51 der Annalen zunächst angeführt und zwar in der eleganten Fassung des § 3 der Abhandlung über „Relativ-Abel'sche Körper.“

1. Der Körper k sei nebst seinen sämtlichen conjugierten k', k'', ... $k^{(m-1)}$ imaginär.

2. Die Anzahl h der Idealklassen sei gleich 1.

Definition 1. Ein solches zu 2 primes Ideal $\mathfrak{a}$ des Körpers k,

Digitized by Google

in Bezug auf das für jede Einheit ξ in k, $\left(\frac{\xi}{\mathfrak{a}}\right) = +1$ ausfällt, heisse ein „primäres Ideal."

Definition 2. Eine solche zu 2 prime ganze Zahl α in k, welche congruent dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach dem Modul 2^3 ausfällt, heisse eine primäre Zahl des Körpers k.

Dann lässt sich der Inhalt des ersten Ergänzungssatzes wie folgt aussprechen:

Satz 1. Wenn $\mathfrak{a}$ ein primäres Ideal ist, so giebt es stets eine primäre Zahl α, sodass $\mathfrak{a} = (\alpha)$ wird und umgekehrt.

Nunmehr wird die Zahl 2 in den Kreis der Betrachtung gezogen. Es sei die Zerlegung von 2 in Ideale

$$2 = \mathfrak{l}_1^{l_1}\mathfrak{l}_2^{l_2}\ldots\mathfrak{l}_s^{l_s}.$$

Definition 3. Ein solches zu 2 primes Ideal $\mathfrak{a}$ in k, das für alle Einheiten ξ und alle ganzzahligen Factoren λ von 2 die Gleichungen erfüllt,

$$\left(\frac{\xi}{\mathfrak{a}}\right) = +1, \quad \left(\frac{\lambda}{\mathfrak{a}}\right) = +1$$

heisse ein hyperprimäres Ideal.

Definition 4. Eine solche zu 2 prime Zahl α des Körpers k, welche congruent dem Quadrat einer ganzen Zahl von k nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{2l_1+1}\mathfrak{l}_2^{2l_2+1}\ldots\mathfrak{l}_s^{2l_s+1}$, heisse eine hyperprimäre Zahl in k.

Danach lässt sich der wesentliche Inhalt des zweiten Ergänzungssatzes aussprechen, wie folgt:

Satz 2. Wenn $\mathfrak{a}$ ein hyperprimäres Ideal ist, so giebt es stets eine hyperprimäre Zahl α, sodass $\mathfrak{a} = (\alpha)$ wird und umgekehrt.

Der wesentliche Inhalt des allgemeinen Reciprocitätsgesetzes für quadratische Reste im Körper k lautet wie folgt:

Satz 3. Wenn ν, μ, ν', μ' irgend welche zu 2 prime ganze Zahlen in k sind derart, dass die beiden Produkte $\nu\nu'$ und $\mu\mu'$ primär sind und ν zu μ, ν' zu μ' prim ist, so ist stets

$$\left(\frac{\nu}{\mu}\right)\left(\frac{\mu}{\nu}\right) = \left(\frac{\nu'}{\mu'}\right)\left(\frac{\mu'}{\nu'}\right).$$

Der Vollständigkeit halber sollen noch die beiden schon besprochenen Sätze 27 und 28 der Annalenarbeit in der hier gegebenen Fassung citiert werden.

Satz 4. Jede Einheit in k, welche primär ist, ist das Quadrat einer Einheit in k.

Digitized by Google

Satz 5. Es giebt in Bezug auf k keinen relativ-quadratisch unverzweigten Körper.

Die Sätze 4 und 5 characterisieren geradezu die gemachten speciellen Voraussetzungen.

Es erhebt sich zunächst die Frage, wie sich die Sätze 1—3 übertragen lassen für die zu Anfang dieses § 6 gemachten Annahmen.

Eine Characterisierung des Beweisverfahrens der Sätze in Bd. 51 der Annalen wird die richtigen Gesichtspunkte zur Uebertragung bieten.

Satz 1 über das Entsprechen von primärem Ideal und primärer Zahl ist ausgesprochen als Satz 32 und 33 in § 23 der soeben citierten Abhandlung und beruht im Wesentlichen auf einem durch transcendente Methoden hergeleiteten Satz 31, der aber nicht an specielle Voraussetzungen für den Grundkörper gebunden ist, sodann aber auf Satz 29, der an die Existenz der Ungleichung

$$t + v^* - \frac{m}{2} > 0$$

gebunden ist, was für die hier gemachten Voraussetzungen ergiebt

$$t + v^* - \frac{m+s}{2} > 0.$$

Allgemein ist diese letzte Ungleichung nur dann erfüllt, wenn $c = 0$ genommen, wenn man also nur solche Zahlen μ von k relativ-quadratische Körper bestimmen lässt, welche total positiv sind. Nun beruht aber das Beweisverfahren in Satz 32 ganz und gar auf der Eigenschaft der relativ-quadratischen Körper, die durch Zahlen π bestimmt werden. Sollen zum Beispiel die Schlüsse von Satz 32 wiederholt werden, welche den Geschlechtsbegriff für die Idealklassen eines $K(\sqrt{\pi})$ benutzen, so muss π eine total positive Zahl sein, es darf $K(\sqrt{\pi})$ keine Erweiterung des Geschlechtsbegriffes erlauben.

Aus dem Folgenden resultiert, dass die Primärzahl total positiv sein muss, und dann bleiben alle Beweise bestehen. Der erste Ergänzungssatz muss für diese Voraussetzungen eine Specialisierung des Begriffs „primäre Zahl“ postulieren, sonst bleibt alles zu Recht bestehen.

1. Ergänzungssatz: „Wenn $\mathfrak{a}$ ein primäres Ideal ist und α eine Zahl in k, die congruent dem Quadrat einer ganzen Zahl von k nach dem Modul 2^3 ist, die ausserdem in allen reellen Körpern positiv ist, so existiert zu einem $\mathfrak{a}$ stets ein α, sodass $\mathfrak{a} = (\alpha)$

Digitized by Google

wird. Wenn α eine primäre Zahl ist, so giebt es stets ein entsprechendes primäres Ideal $\mathfrak{a}$, sodass $(\alpha) = \mathfrak{a}$ ist."

Der 2. Ergänzungssatz lässt sich nach denselben Gesichtspunkten übertragen, wenn der Begriff „hyperprimäre Zahl" entsprechend enger gefasst wird. Auch das allgemeine Reciprocitätsgesetz ist eine direkte Folge dieser Ueberlegung.

Diese Reciprocitätsgesetze schliessen also gerade die vorgenommene Erweiterung des Geschlechtsbegriffs aus, sie gelten nur für ganz specielle Zahlen, für die Zahlen der Hauptklasse im engeren Sinne. Der Geschlechtsbegriff hat seine Kraft in der Frage nach unverzweigten Körpern erwiesen; zu dieser Frage soll nun Stellung genommen werden. Was das allgemeinste Reciprocitätsgesetz für quadratische Reste bei den Voraussetzungen dieses § 6 anbelangt, so soll im weiteren Verlauf der Untersuchung bei Betrachtung der Hilbert'schen Produktformel die Uebertragung ausgeführt werden, wobei dann wieder die Verallgemeinerung der Begriffe „Characterensystem" und „Geschlecht" in den Vordergrund des Interesses rückt.

§ 7. *Satz von Hilbert über die Existenz unverzweigter relativ-quadratischer Körper im Falle* $s-p>0$, $h=1$.

Satz 6 in der Abhandlung über „relativ-Abel'sche Körper."

„Für den Körper k giebt es ein System von $s-p$ unabhängigen relativ-quadratischen unverzweigten Körpern in Bezug auf k. Durch Zusammensetzung dieser $s-p$ Körper entsteht ein Körper K_1 vom Relativgrade 2^{s-p} in Bezug auf k, der sämtliche unverzweigten Körper mit Bezug auf k als Unterkörper enthält und der Klassenkörper von k heissen möge. Die Anzahl $\bar{H}$ der Idealklassen dieses Körpers ist auch im engeren Sinne eine ungerade Zahl."

Der Klassenkörper ist Zerlegungskörper für die Ideale des Grundkörpers. Wegen der Gesetzmässigkeit der Zerlegung, die für alle Ideale einer Klasse die nämliche ist, wegen der engen Beziehung zu den Idealklassen des Grundkörpers hat der Körper K_1 seinen Namen erhalten [1]).

Als Abwechslung in der Reihe der allgemeinen Betrachtungen und zur Bestätigung der ausgesprochenen Sätze soll nun ein specieller Zahlkörper untersucht werden, wobei die in Hilbert's Abhandlung angeführten Bestätigungen vorbildlich sein sollen.

---

1) Hilbert, Bericht, pag. 279.

Digitized by Google

Es soll ein cubischer Körper betrachtet werden, bei dem $s-p=1$ ist, h selbstredend gleich 1. Für $h=1$, $s-p=1$ wird $\overline{h}=2$, sodass nach Satz 6 der Klassenkörper relativ-quadratisch mit Bezug auf k wird. Der Körper K_1 wird offenbar in diesem Falle definiert durch eine Einheit, welche congruent dem Quadrat einer ganzen Zahl nach dem Modul 2^3 ist, dagegen darf die Einheit nicht „primär" sein, weil dieser Begriff das „total positiv" in sich enthält. In § 7 der Abhandlung über „relativ-Abel'sche Körper" ist die betreffende Einheit versehentlich als „primär" bezeichnet worden.

Die Eigenschaften dieses speciellen Klassenkörpers sollen nunmehr am speciellen Zahlkörper erkannt werden. Es möge der durch die Gleichung

$$x^3-4x-1=0$$

definierte Körper $k(\vartheta)$ benutzt werden.

Die Gleichung $x^3-4x-1=0$ hat die Discriminante $\Delta=+229$, es giebt daher 3 reelle Wurzeln ϑ, ϑ', ϑ''; offenbar 1 positive und 2 negative.

Die Klassenanzahl h findet sich gleich 1, was bei Anwendung des Minkowski'schen Satzes über die Ideale mit absolut kleinster Norm sofort klar ist. Derartige Klassenanzahlbestimmungen sind in grossem Umfange gemacht von Reid in seiner 1899 zu Göttingen erschienenen Dissertation, die in vielen Fällen gute Dienste leistet.

Da 3 reelle Körper existieren, so ist $r=2$. Die beiden Grundeinheiten sind ϑ und $\vartheta-2$, beide mit positiver Norm, was für das Folgende wichtig ist. Da nach dem eben Gesagten alle Einheiten ε in k, welche positiv sind, positive Normen haben, so folgt, dass alle Einheiten, die in $k^{(1)}$ und $k^{(2)}>0$ sind, auch in $k^{(3)}$ positiv werden; also ist die characteristische Zahl

$$s-p=1.$$

Es muss nach dem Hilbert'schen Satze 6 einen unverzweigten relativ-quadratischen Körper geben, der durch eine Einheit ε definiert wird, die congruent dem Quadrat einer ganzen Zahl α in k nach 2^3 ist, ohne dass sie das Quadrat einer Einheit in k wird. In der That ist ϑ hier die gesuchte Einheit, denn es wird

$$\vartheta \equiv \vartheta^4, \quad (2^3).$$

$K(\sqrt{\vartheta})$ ist daher der gesuchte Klassenkörper, dem folgende 3 Eigenschaften zukommen.

Digitized by Google

I. Der Klassenkörper $K_1 = K(\sqrt{\vartheta})$ ist unverzweigt in Bezug auf $k(\vartheta)$, d. h. er hat die Relativdiscriminante 1.

II. Die Klassenanzahl $\overline{H}$ ist eine ungerade Zahl.

III. Der Körper K_1 ist Zerlegungskörper für alle Hauptideale im engeren Sinne des Körpers k.

I. ist aus der Konstruction des Körpers $K(\sqrt{\vartheta})$ direkt als richtig einzusehen. (cfr. den Satz 5 in der Annalenarbeit).

II. Die Klassenanzahl wird noch genauer bestimmt werden.

III. Um gerade II zu bestätigen dient III, welches die Zerlegung der „total positiven" Zahlen im Klassenkörper erläutert.

Den besten Ausgangspunkt bilden die ganzen rationalen Primzahlen, die in k unzerlegt bleiben und dann in $K(\sqrt{\vartheta})$ in 2 Primfactoren zerfallen. Im Folgenden folgen einige Zerlegungen, die bei der Klassenanzahlbestimmung in K_1 verwandt werden sollen. Zur Abkürzung sei $\sqrt{\vartheta}$ mit y bezeichnet. Um rasch rationale Primzahlen zu bekommen, setzt man bekanntlich in der Gleichung des Körpers $F(x)$ für x Werte ein $F(\pm 1)$, $F(\pm 2)$, ... $F\left(\pm\frac{p-1}{2}\right)$, welche nach p ein vollständiges Restsystem bilden. In dieser Weise ergeben sich folgende Zahlen p, die unzerlegt bleiben: 3, 5, 11, 17, 19, 43 etc.

Es gelten folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
(3) &= (3, y^3+y^2+2y+1)(3, y^3-y^2+2y-1)\\
(5) &= (5, y^3-y^2+3y+1)(5, y^3+y^2+3y-1)\\
(11) &= (11, y^3-3y^2-y+1)(11, y^3+3y^2-y-1)\\
(17) &= (17, y^3-6y^2+y+1)(17, y^3+6y^2+y-1)\\
(19) &= (19, y^3-4y^2+8y+1)(19, y^3+4y^2+8y-1)\\
(43) &= (43, y^3-13y^2+20y+1)(43, y^3+13y^2+20y-1).
\end{aligned}$$

Eine solche Idealzerlegung ist so zu verstehen:

$$(p) = (p, \varphi_1(y))(p, \varphi_2(y))$$

heisst, dass folgende Kongruenz erfüllt ist;

$$\varphi_1(y)\varphi_2(y) \equiv F(\vartheta) \equiv 0, \quad (p).$$

Was die genaue Darstellung dieser Idealzerlegung anbelangt, so sei auf die Reid'sche Dissertation verwiesen, wo zahlreiches Uebungsmaterial zusammengestellt ist. Die nächste Aufgabe ist dann zu zeigen, dass $\overline{H}$ eine ungerade Zahl ist, was ziemlich ein-

Digitized by Google

fach ist. Dass H keine gerade Zahl wird, ist offenbar, denn schon der Grundkörper hatte $h = 1$. Es giebt unter den sechs konjugierten $k^{(1)}$, $k^{(2)}$, ... $k^{(6)}$ 2 reelle und 2 Pare imaginärer Körper, was aus der Beschaffenheit des ϑ ohne weiteres folgt. Soll nun $s-p>0$ sein, etwa gleich 1, so müsste jede Einheit $\alpha+\beta\sqrt{\vartheta}$ des Körpers $K(\sqrt{\vartheta})$ eine positive Relativnorm haben. Dass dies nicht der Fall ist, zeigt das Beispiel der Einheit

$$E = \frac{1+\vartheta\sqrt{\vartheta}}{2}$$

SE wird negativ, denn $N(E) = -\vartheta$.

Es zeigt sich, dass Zahlen, die in $k^{(1)}$ positiv sind, in $k^{(2)}$ und $k^{(3)}$ aber <0, in $K(\sqrt{\vartheta})$ nicht zerlegt werden. Dagegen werden alle total positiven Zahlen zerlegt.

Nach diesen Erörterungen über den Klassenkörper für die Annahme $h = 1$, welche die Wichtigkeit der Theorie der unverzweigten Körper keineswegs aber im richtigen Lichte erscheinen lässt, sollen die Reciprocitätsgesetze durch specielle Beispiele bestätigt werden.

Der Körper $k(\vartheta)$ hat 2 Grundeinheiten, also $2^2 = 8$ Einheitenverbände, die durch die Einheiten

$$+1,\ -1,\ +\vartheta,\ -\vartheta,\ +\vartheta-2,\ -(\vartheta-2),\ +\vartheta(\vartheta-2),\ -\vartheta(\vartheta-2)$$

definiert werden.

Es sind offenbar die Restcharactere

$$\left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right),\ \left(\frac{\vartheta}{\mathfrak{p}}\right),\ \left(\frac{\vartheta-2}{\mathfrak{p}}\right)$$

auszuwerten; durch diese 3 Symbole sind die anderen bestimmt.

Die Zerlegung der Zahlen 23, 29, 73, 89 etc. liefern folgende Primzahlen 1. und 2. Grades.

$$\begin{aligned}
23 &= (2\vartheta-1)(4\vartheta^2+2\vartheta-15),\\
29 &= (2\vartheta-3)(4\vartheta^2+6\vartheta-7),\\
73 &= (6\vartheta+1)(36\vartheta^2-6\vartheta-143),\\
89 &= (9\vartheta+2)(81\vartheta^2-18\vartheta-320).
\end{aligned}$$

Wenn allgemein mit $\mathfrak{p}$ die Factoren 1. Grades, mit $\mathfrak{q}$ die Factoren 2. Grades bezeichnet werden, so ergiebt sich für die Restcharactere:

Digitized by Google

1) 23 $\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)=-1,\quad \left(\frac{\vartheta}{\mathfrak{p}}\right)=+1,\quad \left(\frac{\vartheta-2}{\mathfrak{p}}\right)=+1,\\ \left(\frac{-1}{\mathfrak{q}}\right)=+1,\quad \left(\frac{\vartheta}{\mathfrak{q}}\right)=+1,\quad \left(\frac{\vartheta-2}{\mathfrak{q}}\right)=-1,\end{array}\right.$

2) 29 $\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)=+1,\quad \left(\frac{\vartheta}{\mathfrak{p}}\right)=+1,\quad \left(\frac{\vartheta-2}{\mathfrak{p}}\right)=-1,\\ \left(\frac{-1}{\mathfrak{q}}\right)=+1,\quad \left(\frac{\vartheta}{\mathfrak{q}}\right)=+1,\quad \left(\frac{\vartheta-2}{\mathfrak{q}}\right)=-1,\end{array}\right.$

3) 73 $\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)=+1,\quad \left(\frac{\vartheta}{\mathfrak{p}}\right)=+1,\quad \left(\frac{\vartheta-2}{\mathfrak{p}}\right)=-1,\\ \left(\frac{-1}{\mathfrak{q}}\right)=+1,\quad \left(\frac{\vartheta}{\mathfrak{q}}\right)=+1,\quad \left(\frac{\vartheta-2}{\mathfrak{q}}\right)=-1,\end{array}\right.$

4) 89 $\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)=+1,\quad \left(\frac{\vartheta}{\mathfrak{p}}\right)=+1,\quad \left(\frac{\vartheta-2}{\mathfrak{p}}\right)=+1,\\ \left(\frac{-1}{\mathfrak{q}}\right)=+1,\quad \left(\frac{\vartheta}{\mathfrak{q}}\right)=+1,\quad \left(\frac{\vartheta-2}{\mathfrak{q}}\right)=+1.\end{array}\right.$

Ein Beispiel soll das anzuwendende Verfahren erläutern:

$$29 = (2\vartheta-3)(4\vartheta^2+6\vartheta-7).$$

Die Auswertung der Symbole geschieht durch den Fermat-'schen Satz, der in § 2 in der modificierten Form angeführt ist, die in der Theorie der quadratischen Reste auftritt.

Der erweiterte Satz drückt sich durch die Formel

$$\alpha^{\frac{n(\mathfrak{p}-1)}{2}} \equiv \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right), \quad (\mathfrak{p})$$

aus, woraus für das Ideal $\mathfrak{p} = (2\vartheta-3)$ folgt:

$$\left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right) = (-1)^{14} = +1,$$

$$\left(\frac{\vartheta}{\mathfrak{p}}\right) \equiv \vartheta^{14} \quad (\mathfrak{p}).$$

Da $\mathfrak{p}$ ein Zahlfactor von 29 ist, so können an Stelle von ϑ Zahlen eingeführt werden, die nach 29 congruent zu ϑ sind. Also wird

$$\left(\frac{\vartheta}{2\vartheta-3}\right) = \left(\frac{-28\vartheta}{2\vartheta-3}\right) = \left(\frac{-28\vartheta+14(2\vartheta-3)}{2\vartheta-3}\right) = \left(\frac{-42}{2\vartheta-3}\right).$$

Digitized by Google

Also wird

$$\left(\frac{\vartheta}{2\vartheta-1}\right) = \left(\frac{-42}{29}\right) = \left(\frac{16}{29}\right) = +1.$$

$$\left(\frac{\vartheta-2}{2\vartheta-1}\right) = \left(\frac{-44}{29}\right) = \left(\frac{2}{29}\right)\left(\frac{7}{29}\right) = -1.$$

Die Symbolbestimmung stützt sich danach nur auf ganz elementare Kongruenzbegriffe und die Theorie der quadratischen Reste im Gebiet der rationalen Zahlen. Z. B.

$$\left(\frac{-42}{2\vartheta-1}\right) \equiv (-42)^{\frac{29-1}{2}}, \quad (29)$$

sagt aus, dass -42 quadratischer Rest nach $(2\vartheta-3)$ ist, wenn es Rest nach 29 ist, was unmittelbar aus der Theorie der ganzen rationalen Zahlen klar ist. (cfr. Dirichlet-Dedekind, pag. 79).

Nunmehr ist der Character von q zu bestimmen:

$$\left(\frac{-1}{q}\right) = \left(\frac{-1}{(4\vartheta^2+6\vartheta-7)}\right) \equiv (-1)^{\frac{29^2-1}{2}} = +1,$$

$$\left(\frac{\vartheta}{q}\right) \equiv \vartheta^{\frac{29^2-1}{2}} \equiv \vartheta^{14\cdot}.$$

Es wird

$$\vartheta^3 = 4\vartheta+1, \quad \vartheta^6 = 16\vartheta^2+8\vartheta+1 \equiv -16\vartheta, \quad (q).$$

Daher $\left(\frac{\vartheta}{q}\right) = +1.$

Nämlich $\vartheta^6 \equiv -16\vartheta$ liefert

$$\vartheta^3 \equiv -2^4, \quad \vartheta^{420} \equiv 2^{4\cdot 84} \equiv (2^{28})^{12} \equiv +1, \quad (29).$$

Endlich wird

$$\left(\frac{\vartheta-2}{q}\right) \equiv (\vartheta-2)^{30\cdot 14}, \quad (q)$$

$$(\vartheta-2)^2 = \vartheta^2-4\vartheta+4 \equiv 9\vartheta+13, \quad (q)$$

$$(\vartheta-2)^4 \equiv (9\vartheta+13)^2 \equiv 11\vartheta-1, \quad (q)$$

$$(\vartheta-2)^{12} \equiv (11\vartheta-1)^3 \equiv -81, \quad (q).$$

Daher

$$(\vartheta-2)^{420} = (\vartheta-2)^{12\cdot 35} \equiv (-3^4)^{35} \equiv -3^{5\cdot 28} \equiv -1, \quad (q).$$

Die Zerlegung von 29, 73, 89 bestätigen die Ergänzungssätze;

Digitized by Google

die Charactere der beiden Faktoren stimmen überein, was damit stimmt, dass die 3 Zahlen sämtlich von der Form $4k+1$, also primär sind.

Die Zerlegung von 89 liefert insbesondere 2 primäre Hauptideale, in der That wird auch:

$$(9\vartheta+2)(\vartheta-2) = 9\vartheta^2-16\vartheta-4 \equiv \vartheta^2, \quad (2^2)$$
$$(81\vartheta^2-18\vartheta-320)(\vartheta+2) \equiv 1, \quad (2^3).$$

Durch Multiplication mit geeigneten Einheiten gehen diese Zahlen in der That in primäre Zahlen über. Aus (1) und (2) folgt, dass

$$\alpha = (4\vartheta^2+2\vartheta-15)(2\vartheta-3)\vartheta^{\mu}(\vartheta-2)^{\nu}$$

eine primäre Zahl sein muss; thatsächlich wird auch

$$(4\vartheta^2+2\vartheta-15)(2\vartheta-3) \equiv (2\vartheta+1)^2, \quad (2^3).$$

Ebenso auch

$$(4\vartheta^2+2\vartheta-15)(4\vartheta^2+6\vartheta-7) \equiv (2\vartheta+1)^3, \quad (2^7)$$
$$(2\vartheta-3)(6\vartheta+1) \equiv (2\vartheta+1)^3, \quad (2^3)$$
$$(4\vartheta^2+2\vartheta-15)(6\vartheta+1) \equiv (6\vartheta+1)^2, \quad (2^3)$$
$$\text{etc.}$$

Alle primären Zahlen, die hier zusammengestellt sind, erweisen sich als „total positiv", was mit der Engerfassung des Begriffs „primär", und somit mit der Abänderung der Ergänzungssätze im Einklang steht.

Ebenso zeigt sich, dass

$$\text{I.} \quad \left(\frac{2\vartheta-3}{4\vartheta^2+2\vartheta-15}\right)\left(\frac{4\vartheta^2+2\vartheta-15}{2\vartheta-3}\right) = \left(\frac{6\vartheta+1}{4\vartheta^2+6\vartheta-7}\right)\left(\frac{4\vartheta^2+6\vartheta-7}{6\vartheta+1}\right) = -1$$

wird.

Hierbei ist

$$\nu\nu' = (2\vartheta-3)(6\vartheta+1) \equiv \alpha^2, \quad (2^2)$$
$$\mu\mu' = (4\vartheta^2+2\vartheta-15)(4\vartheta^2+6\vartheta-7) \equiv \beta^2, \quad (2^2)$$

und die Relation I. bestätigt das Reciprocitätsgesetz, wie es in Satz 3 der 2. Hilbert'schen Abhandlung ausgesprochen ist. Ein wichtiges Korollar zu diesem Satz ist folgender: „Wenn π eine Primärzahl ist, ϱ irgend eine zu π prime Zahl in k, so gilt stets

$$\left(\frac{\pi}{\varrho}\right) = \left(\frac{\varrho}{\pi}\right).$$

Digitized by Google

Diese Beziehung, die eine wesentliche Rolle beim Beweise des Fundamentalsatzes über die Geschlechter des relativ-quadratischen Körpers spielt, wird hier durch folgende Zahlen bestätigt:

$$\varkappa = 9\vartheta^2 - 16\vartheta - 4 = (\vartheta - 2)(9\vartheta + 2)$$

$$\varrho = 2\vartheta - 3.$$

Es wird

$$\left(\frac{2\vartheta - 3}{2(9\vartheta + 2)}\right) = -1, \quad \left(\frac{(\vartheta - 2)(9\vartheta + 2)}{2\vartheta - 3}\right) = -1. +1 = -1.$$

Somit wären für den Körper $x^3 - 4x - 1 = 0$ alle die Hauptsätze kurz bestätigt.

Es ist eine auffallende Thatsache, dass verhältnismässig sehr wenige cubische Körper mit $h = 1$ die Zahl $s - p > 0$ besitzen; es soll hier nur kurz ein zweiter Körper mit $s - p = 1$ angeführt werden.

$k(\vartheta)$ wird definiert durch die Gleichung

$$x^3 - 8x - 1 = 0.$$

$$\Delta = 2021 = 45^2 - 2^2 = 47.43.$$

$$\varepsilon_1 = \vartheta, \quad \varepsilon_2 = 9\vartheta - 26.$$

Zunächst ist die Klassenanzahl k zu bestimmen. Der Minkowski'sche Satz sagt aus, dass für einen beliebigen Körper k in jeder Idealclasse ein Ideal j existiert, dessen Norm

$$n(j) < \left(\frac{4}{\pi}\right)^{r_2} \cdot \frac{m!}{m^m} \sqrt{|\Delta|}.$$

Hierbei ist r_2 die Anzahl imaginärer Körperpaare im System der m konjugierten Körper, m der Grad des Körpers.

Für $k(\vartheta)$ ist $r_2 = 0$, $m = 3$, folglich wird

$$n(j) < \frac{6.45}{27} < 10.$$

Es sind daher die Primzahlen 2, 3, 5, 7 zu untersuchen.

$F(a) \equiv a^3 - 8a - 1$ ist zu berechnen für

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3 = \pm \frac{7-1}{2},$$

$$(-8, +6), \quad (-9, 7), \quad (2, -4).$$

Es ist 5 unzerlegbar, 2 und 7 zerfallen in Hauptideale, 3 ist

Digitized by Google

zu untersuchen:

$$(3,\ \vartheta-2)^2 = (\vartheta-2).$$

Soll $(3, \vartheta-2)$ ein Hauptideal sein, so muss eine der 8 Zahlen

$$\pm(\vartheta-2),\quad \pm\vartheta(\vartheta-2),\quad \pm(9\vartheta-26)(\vartheta-2),\quad \pm\vartheta(9\vartheta-26)(\vartheta-2).$$

Es wird

$$(9\vartheta-26)(\vartheta-2) = (2\vartheta^2-3\vartheta-8)^2.$$

Also auch (3) zerfällt in Hauptideale, womit nachgewiesen ist, dass $k(\vartheta)$ die Klassenanzahl $h=1$ hat. ϑ und $9\vartheta-26$ sind beide positiv und haben die Normen $+1$, woraus folgt, dass alle positiven Einheiten ε^+ Normen $+1$ haben; also wird $s-p=1$. Der Klassenkörper wird durch die primäre Einheit ϑ bestimmt

$$K_1 = K(\sqrt{\vartheta}).$$

Damit ist die Existenz des Klassenkörpers im singulären Fall $h=1$ bestätigt. Für cubische Körper insbesondere lässt sich der allgemeine Hilbert'sche Satz in der Form aussprechen:

„Wenn in einem cubischen Körper mit beliebiger Klassenanzahl alle positiven Einheiten Normen $+1$ haben, so existiert stets ein unverzweigter relativ-quadratischer."

III. In den folgenden Paragraphen soll die Theorie der quadratischen Reste für Grundkörper dargestellt werden, welche eine durch 2 teilbare Klassenanzahl haben. Der Einfachheit halber möge die Theorie für die folgenden Voraussetzungen behandelt werden.

1) Der Körper hat s reelle conjugierte. Es sollen nur Relativkörper $K(\sqrt{\mu})$ in Betracht gezogen werden, die durch total positive μ bestimmt werden.

2) $h = \overline{h} = 2$, d. h. $s-p = 0$.

Diese beiden Voraussetzungen haben nichts Beschränkendes, was der Verlauf der Untersuchung zeigen wird.

§ 8. (Im Anschluss an die Annalenarbeit). *Uebertragung der Sätze, die für die Entwicklung der Theorie in Frage kommen.*

Von besonderem Interesse ist im Falle $h=2$ die Untersuchung desjenigen relativ-quadratischen Körpers, welcher die Relativdiscriminante 1 hat, d. h. welcher „unverzweigt" ist.

Digitized by Google

Der Existenzbeweis für einen solchen Relativkörper $K(\sqrt{\omega})$ ist der schwierigste Punkt der ganzen Theorie; der Beweis ist durch Hilbert[1]) erbracht und beruht wesentlich auf dem in § 2 dieser Untersuchung citierten Satze 18 der Annalenarbeit. Die Existenz unendlich vieler Primideale $\mathfrak{p}$ mit vorgeschriebenen quadratischen Characteren für beliebige Grundkörper ist für die Methode beim Existenzbeweis für Körper $K(\sqrt{\omega})$ massgebend.

Der Körper $K(\sqrt{\omega})$ hat für die hier gemachten Voraussetzungen eine ganz besondere Bedeutung, er ist der „Klassenkörper" zum Grundkörper k, zu dem er in innigster Beziehung steht. Es wird sich zeigen, dass gerade durch den Klassenkörper das Reciprocitätsgesetz im Grundkörper gewonnen wird.

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen soll zunächst die Theorie, welche in der Annalenarbeit allgemein dargestellt ist, auf die hier gemachten Voraussetzungen übertragen werden.

Da die Modification jetzt wesentlich durch die gerade Klassenanzahl bewirkt wird, so erscheint es nicht als Einschränkung, wenn nur total positive μ in Betracht gezogen werden. Auch die Annahme $s-p=0$ ist nicht wesentlich; eine wichtige Fragestellung wäre allerdings diese: „Wenn $h=2$, $\overline{h}=2^{s-p+1}$ ist $(s-p>0)$, wie hängen dann die unverzweigten Körper zusammen, deren Existenz einerseits durch die gerade Klassenanzahl andererseits durch die Zahl $s-p>0$ verbürgt ist?"

Ein Beispiel soll auch für diesen Fall angeführt werden.

Ist die Klassenanzahl h das Doppelte einer ungeraden Zahl, so treten nur geringe Abänderungen der Darstellung auf.

Nach diesen Bemerkungen allgemeiner Natur müssen diejenigen Sätze aus Math. Annalen 51 übertragen werden, welche zum Aufbau der Theorie unerlässlich sind.

Man kann ganz allgemein an die Spitze der Untersuchung zwei Verallgemeinerungen von wichtigen Definitionen der Theorie in Math. Ann. 51 stellen, welche aus der Abänderung der Voraussetzungen fliessen.

1) Verallgemeinerung des Einheitenbegriffs.

2) Verallgemeinerung des Geschlechtsbegriffs.

ad 1. Wenn man als „erweiterte Einheiten" in k alle die Zahlen bezeichnet, die als Factoren einer Zahl μ zur Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ prim ausfallen, so kommt zu den gewöhnlichen Einheiten ε_i in k noch das System aller Zahlen, die

1) Relativ-Abel'scher Körper, § 10 ff.

Digitized by Google

Quadrate von Idealen $\mathfrak{p}$ von k sind, wo $\mathfrak{p}$ Nichthauptideal ist. Dies entspringt aus Satz 5 in Math. Ann. 51, der in § 2 dieser Arbeit citiert ist.

Mit dieser Verallgemeinerung ist wesentlich Rücksicht genommen auf die Untersuchung unverzweigter Relativkörper.

ad 2. Hand in Hand mit dieser Abänderung geht die Erweiterung des Geschlechtsbegriffs, die sich in folgender Form aussprechen lässt: Zunächst wird das Characterensystem einer Zahl von k definiert wie in § 11 der Annalenarbeit.

Sei nun $\mathfrak{J}$ ein Ideal irgend eines relativ-quadratischen Körpers $K(\sqrt{\mu})$, so bilde man die Relativnorm $N(\mathfrak{J})$ und multipliciere mit der Potenz $\mathfrak{r}^u$ eines Ideals $\mathfrak{r}$, welches nicht der Hauptklasse in k angehört, wobei u so zu nehmen ist, dass $N(\mathfrak{J})\,\mathfrak{r}^u$ eine ganze Zahl ι in k wird, denn das Characterensystem eines Ideals $\mathfrak{J}$ in $K(\sqrt{\mu})$ ist auf das einer Zahl ι in k zurückzuführen. u ist offenbar der der Werte 0, 1 fähig.

Zu den Einheiten ± 1, welche das Characterensystem von 0 bilden, füge man die Einheit $(-1)^u$. Nun kann man genau dieselben Einheiteneigenschaften benutzen wie früher, um die Anzahlen r und r^* einzuführen.

Zunächst folgt aus der Erweiterung des Begriffs „Einheit", dass der Körper $k(\vartheta)$ $2^{\frac{m+s}{2}+1}$ „Einheitenverbände im erweiterten Sinne" hat. Ist t die Anzahl der in der Relativdiscriminante enthaltenen Ideale, so folgt, dass jedes Geschlecht durch $t+1$ erweiterte Einheiten ± 1 dargestellt wird, also auch die Relation $r^*+r=t+1$; an Stelle von r tritt hier $r+1$, was in den Sätzen über die obere Anzahl der Geschlechter zur Geltung kommen wird.

Will man die §§ 14—16 der Annalenarbeit sachgemäss übertragen, so ist es nötig, zwei Fälle, zwei Arten von relativ-quadratischen Körpern zu unterscheiden.

I. Die Ideale, welche in k nicht Hauptideale sind, werden in $K(\sqrt{\mu})$ Hauptideale.

II. Die Ideale, welche in k nicht Hauptideale sind, werden auch in $K(\sqrt{\mu^*})$ nicht Hauptideale.

Die in § 14 von Annalen 51 bewiesenen Sätze über gewisse Systeme von Einheiten H_ι und η_ι bleiben zu Recht bestehen, nur die Anzahlen werden etwas verändert, was aber hier unwesentlich ist.

Dagegen ist die erste Aussage von Satz 21, dass nämlich ein

Digitized by Google

ambiger Complex eines $K(\sqrt{\mu})$ lauter ambige Klassen enthalte, abzuändern, während die zweite Aussage von Satz 21 zu Recht bestehen bleibt.

Die Sätze 22 und 23 nehmen auf die Unterscheidung I. und II. Rücksicht. Im Falle I. lautet die Relation

$$\text{I.} \quad \begin{cases} a^* = t + v^* - \dfrac{m+s}{2}, \\ a = t + v - \dfrac{m+s}{2}, \end{cases}$$

$$\text{II.} \quad \begin{cases} a^* = t + v^* - \dfrac{m+s}{2} - 1, \\ a = t + v - \dfrac{m+s}{2} - 1. \end{cases}$$

Nun folgt insbesondere aus dem abgeänderten Satz 21, dass für die hier gemachten Voraussetzungen an Stelle der Relation

$$a^* \geqq 1$$

die Ungleichung

$$a^* \geqq 0$$

tritt.

Fall I. Für Körper $\overset{\text{I.}}{K}(\sqrt{\mu})$ tritt die Relation auf:

$$t + v^* - \frac{m+s}{2} \geqq 0.$$

Fall II. $\overset{\text{II.}}{K}(\sqrt{\mu})$

$$t + v^* - \frac{m+s}{2} \geqq 1.$$

Da sicher in beiden Fällen

$$v^* - \frac{m+s}{2} \leqq 0$$

ist, so folgt dass im Falle

$$\text{I.} \quad t \geqq 0, \qquad \text{II.} \quad t \geqq 1$$

wird.

Diese Relationen enthalten das folgende wichtige Resultat:

„Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines unverzweigten relativ-quadratischen Körper $K(\sqrt{\omega})$ ist, dass alle Ideale

Digitized by Google

des Grundkörpers k, welche in k nicht Hauptideale sind, in $K(\sqrt{\omega})$ Hauptideale werden."

Für die folgenden Sätze über die obere Grenze der Geschlechter eines Körpers $K(\sqrt{\mu})$ ist es nötig, eine genauere Betrachtung anzustellen über das Wesen der beiden Begriffserweiterungen von „Einheit" und „Geschlecht".

Es giebt zunächst im erweiterten Sinne $2^{\frac{m+s}{2}+1}$ Einheitenverbände in k.

Es giebt $r^*+r = t+1$ erweiterte Einheiten ± 1, welche das Characterensystem eines Ideals $\mathfrak{J}$ von $K(\sqrt{\mu})$ bilden. Dabei ist r^* dieselbe Zahl wie in § 17 von Math. Ann. 51.

Bildet man nun aus der Zahl ι eine Zahl $\bar{\iota}$ durch Multiplication mit gewissen Einheiten $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_{r^*}$, so wird das Characterensystem von $\mathfrak{J}$ aus $t-r^*+1 = r$ Einheiten ± 1 bestehen, was für das Folgende zu verwenden ist.

Die Sätze 24 und 25 sind übertragbar, machen aber die Unterscheidung zwischen I. und II. notwendig; es resultiert aus S. 24

$$\text{I.} \quad r+1 \geqq 1, \quad r \geqq 0.$$
$$\text{II.} \quad r+1 \geqq 2, \quad r \geqq 1.$$

$K(\sqrt{\mu})$ von der Eigenschaft II. können demnach sicher keine unverzweigten Relativkörper bestimmen, was sich mit der früheren Aussage deckt.

Satz 25 ist vollkommen unverändert, er hängt von h nicht ab.

Satz 26 wird für

$$\text{I.} \quad g \leqq 2^{r^*-1}$$
$$\text{II.} \quad g \leqq 2^{r^*-1}, \quad \text{woeben } r^* = r+1 \text{ ist.}$$

Also auch der Satz über die obere Grenze der Geschlechter überträgt sich auf alle $K(\sqrt{\mu})$, seien sie von der I. oder II. Art.

Satz 27 in Math. Ann. 51, der die Nichtexistenz unverzweigter Körper $K(\sqrt{\omega})$ für die dort gemachten Voraussetzungen aussagt, ist schon erledigt; es kommt die wichtige Unterscheidung von $K(\text{I})$ und $K(\text{II})$ dabei heraus.

Satz 28 liesse sich hier so aussprechen: „Alle durch primäre Einheiten ε_i bestimmten relativ-quadratischen Körper $K(\sqrt{\varepsilon_i})$ gehören zur Art I."

Digitized by Google

§ 9. *Ergänzungssätze und allgemeines Reciprocitätsgesetz für die in § 8 über den Grundkörper k gemachten Voraussetzungen.*

Es ist schon die Bemerkung gemacht worden, dass der Klassenkörper $K(\sqrt{\omega})$ für den Grundkörper k von wesentlichster Bedeutung, besonders für die Theorie von Potenzresten beliebigen Grades von ausserordentlicher Tragweite ist. Die Existenz des Klassenkörpers ist für den Fall relativ-cyclischer Körper vom Primzahlgrade ($l = 2n+1$) in Satz 94 des Hilbert'schen Berichts bewiesen. Wie schon erwähnt bezieht sich der Name „Klassenkörpers“ [1]) auf die Eigenschaft dieses Relativkörpers, zu den Idealklassen des Grundkörpers in besonders einfacher Beziehung zu stehen. Im Folgenden sollen die Haupteigenschaften des Klassenkörpers für den Fall $h = \bar{h} = 2$ geschildert werden; genaueres enthält die oft erwähnte 2. Hilbert'sche Abhandlung in den Göttinger Nachrichten.

I. Der Klassenkörper K_1 ist unverzweigt mit Bezug auf k, d. h. er hat die Relativdiscriminante 1 in Bezug auf k.

II. Die Klassenanzahlen H und ($\bar{H}$ im engeren) sind beide ungerade.

III. „Diejenigen Primideale, welche in k Hauptideale sind, zerfallen in K_1 in das Produkt zweier Primideale; diejenigen Primideale von k, welche in k nicht Hauptideale sind, bleiben in K_1 unzerlegt, werden aber dort Hauptideale.“

Umgekehrt ist durch jede einzelne in diesen 3 Sätzen ausgesprochene Eigenschaft der Klassenkörper vollkommen bestimmt.

Die Eigenschaft I. beweist direkt die zweite Aussage von Satz III, die für das Folgende sehr bedeutsam ist.

Die in II. ausgesprochene Thatsache folgt ebenso direkt aus dem Hilbert'schen Hülfssatz 2 in § 11 der 2. Abhandlung, wonach jedes Ideal $\mathfrak{J}$ von $K(\sqrt{\omega})$, dessen Quadrat einem Ideale j in k äquivalent ist, selbst einem Ideal j^* in k äquivalent wird.

Dagegen bedarf die erste Aussage von Satz III eines besonderen Beweises; sie sagt insbesondere die wichtige Thatsache aus, dass nur für Ideale der Hauptklasse von k die Beziehung besteht

$$\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}}\right) = +1$$

(cfr. Zerlegungssymbol).

1) Hilbert, Bericht, pag. 279. H. Weber, Math. Annalen 48, 49, Relativ-Abel'sche Körper, pag. 10 (über Gruppen in Zahlkörpern).

Digitized by Google

Da ω eine Zahl ist, die durch Multiplication von „erweiterten Einheiten“ entstanden ist, so folgt insbesondere die wichtige Thatsache, dass nur Hauptideale von k primär sein können.

Dies folgt ganz wesentlich aus dem erweiterten Begriff der Einheit und die Definition des primären Ideals ist dadurch auch erweitert, was noch näher erörtert werden soll.

Teil 2 von III, der mittels der früheren Ergebnisse aus Ungleichungen direkt evident ist, spricht eine Eigenschaft des Klassenkörpers K_1 aus, welche für die gesamte Körpertheorie von grösster Tragweite ist.

Beachtet man, dass aus der Gleichung

$$\mathfrak{p} = A$$

($\mathfrak{p}$ ist ein Ideal der Nebenklasse von k, A eine ganze Zahl in $K(\sqrt{\omega})$) die zweite folgt $\mathfrak{p} = SA$, so resultiert:

„Jedes Ideal $\mathfrak{p}$ in k, welches nicht der Hauptklasse angehört, entspricht einer ganzen Zahl A in $K(\sqrt{\omega})$, die von ihrer relativ-conjugierten nur um Einheitsfactoren E_t von $K(\sqrt{\omega})$ verschieden ist.“

Nennt man eine solche Zahl A eine „Ambige“ des Klassenkörpers, so folgt die Definition: „Eine Ambige des Klassenkörpers ist eine ganze Zahl in K_1, welche „total positiv“ ist und sich von ihren relativ-conjugierten Zahlen nur um Factoren unterscheidet, die Einheiten in K_1 sind.“

Dieser Satz von der Existenz der Ambigen zeigt, dass alle Zahlen von k auf eine und nur auf eine Weise in Primzahlen des Körpers K_1 zerlegt werden.

„Die Adjunktion des Klassenkörpers bewirkt die eindeutige Zerlegung der Zahlen des Grundkörpers.“

Durch Hilbert's Theorie der Klassenkörper ist ein Mittel gewonnen, die Eindeutigkeit des Factorenzerlegens der Zahlen beliebiger Rationalitätsbereiche herzustellen, ohne Kummer'sche Idealfactoren. An die Stelle der Idealzahl tritt die wirkliche Zahl, was ein grosser Fortschritt ist. Dazu ist aber die Adjunction eines höheren Zahlbereichs, nämlich des Klassenkörpers erforderlich. Die beiden hier skizzierten Methoden erinnern an die functionentheoretischen Verfahren, welche die Eindeutigkeit der Zerlegung algebraischer Functionen bewirken.

Die Hilbert'sche Methode des Klassenkörpers weist eine grosse Analogie mit der der Weierstrass'schen Primfunction auf. Weierstrass führt eine transcendente Function (die Primfunction) mit gewissen characteristischen Eigenschaften ein, um algebraische

Digitized by Google

Functionen eindeutig zerlegen zu können, also bewirkt auch hier die Adjunction eines höheren Gebildes nämlich des Klassenkörpers die Aufrechterhaltung des Eindeutigkeitsprincips.

I. Ergänzungssatz: ($\mathfrak{p}$ und π prim zu 2).

Definition 1. „Wenn $\mathfrak{p}$ nach allen „Einheiten" von k quadratischer Rest ist, so heisse $\mathfrak{p}$ ein „primäres Ideal."

Definition 2. „Wenn π eine solche ganze Zahl in k ist, die congruent dem Quadrat einer ganzen Zahl von k nach 2^3 ist ($\pi \equiv \alpha^2$, (2^3)), so heisse π eine Primärzahl."

Der erste Ergänzungssatz lautet dann:

E. I. „Wenn $\mathfrak{p}$ ein primäres Ideal in k ist, so giebt es stets eine primäre Zahl π, so dass $\mathfrak{p} = (\pi)$ wird und umgekehrt."

Zum Beweises dieses Satzes ist der Klassenkörper zu benutzen, der ungerade Klassenanzahl H hat und deswegen den Sätzen 1, 2, 3 der 2. Hilbert'schen Abhandlung genügt.

Den Schlüssel zum Beweise liefert wiederum der erweiterte Einheitsbegriff.

Sei j ein Ideal der Nebenklasse von k, so wird $j^2 = \iota$ eine Zahl in k.

Nunmehr gilt folgender Hülfssatz:

„Alle Zahlen von k, die Quadrate von Idealen der Nebenklasse sind, zerfallen im Klassenkörper in das Produkt zweier Ambigen."

Es wird allgemein

$$\iota = A.SA = EA^2. \tag{1}$$

Der Hülfssatz ist nach den bisherigen Erörterungen evident.

Sei nun $\mathfrak{p}$ ein primäres Ideal, so gilt wegen

$$\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}}\right) = +1$$

die Thatsache, dass $\mathfrak{p}$ Hauptideal ist und in $K(\sqrt{\omega})$ in 2 Primideale zerfällt:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}.S\mathfrak{P}. \tag{2}$$

Sei ferner $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{\frac{m+s}{2}-1}$ das System von Grundeinheiten in k, setzt man ferner

$$-1 = \varepsilon_{\frac{m+s}{2}}, \quad (\varrho) = \mathfrak{r}^2 = \varepsilon_{\frac{m+s}{2}+1},$$

Digitized by Google

so gilt insbesondere

$$(3) \qquad \left(\frac{\iota}{\mathfrak{p}}\right) = \left\{\frac{E.A^2}{\mathfrak{p}}\right\} = \left\{\frac{E}{\mathfrak{p}}\right\} = +1.$$

Relation (3) sagt aus, dass $\mathfrak{p}$ im Körper $K(\sqrt{\omega})$ primär ist. Ferner wird

$$(4) \qquad \left\{\frac{E}{\mathfrak{p}}\right\} = \left\{\frac{E}{\mathfrak{P}}\right\}\left\{\frac{E}{S\mathfrak{P}}\right\}.$$

Da nun

$$\left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right) = \left\{\frac{-1}{\mathfrak{P}}\right\} = +1$$

wird, so resultiert:

„$\mathfrak{P}$ und $S\mathfrak{P}$ sind primäre Ideale in K_k."

Es gilt dann nach dem Reciprocitätsgesetz, das in $K(\sqrt{\omega})$ giltig ist:

$$\mathfrak{P}^H = (\Pi), \quad (S\mathfrak{P})^H = (S\Pi).$$

Wo nun Π und $S\Pi$ die Kongruenzen erfüllen:

$$\Pi \equiv \Gamma^2, \quad (2^2)$$
$$S\Pi \equiv S\Gamma^2, \quad (2^2).$$

Dass aus $\Pi \equiv \Gamma^2$, (2^2) die Beziehung folgt

$$S\Pi \equiv (S\Gamma)^2, \quad (2^2),$$

lässt sich so zeigen:

Sei

$$\Pi = \alpha+\beta\sqrt{\omega}, \quad \Gamma = \gamma+\delta\sqrt{\omega},$$
$$S\Pi = \alpha-\beta\sqrt{\omega}, \quad S\Gamma = \gamma-\delta\sqrt{\omega}.$$

Gilt dann:

$$\alpha-\gamma^2-\delta^2\omega \equiv 0, \quad (2^2)$$
$$\beta-2\gamma\delta \equiv 0, \quad (2^2)$$

so muss sicher $\beta \equiv 0$, (2) sein, womit bewiesen ist, dass auch

$$-\beta+2\gamma\delta \equiv 0, \quad (2^2).$$

Da H eine ungerade Zahl ist, so folgt noch besonders, dass stets die Beziehung erfüllt ist: $\pi^* \equiv \beta^2$, (2^2), wo $(\pi^*) = \mathfrak{p}$ wird.

Damit ist der erste Ergänzungssatz bewiesen.

Der zweite Ergänzungssatz berücksichtigt die in 2 aufgehenden Factoren; die Methode des Beweises bleibt genau dieselbe;

Digitized by Google

der Satz behält nach Erweiterung des Begriffs der Einheit die Form von Satz 2 der zweiten Hilbert'schen Arbeit.

Was endlich das allgemeine Reciprocitätsgesetz

$$\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\left(\frac{\nu}{\mu}\right) = \left(\frac{\mu^*}{\nu^*}\right)\left(\frac{\nu^*}{\mu^*}\right)$$

anbelangt, so lässt es sich durch die Ergänzungssätze ohne alle Schwierigkeit aus Satz 36 in Annalen 51 herleiten. Zunächst ist nach der Voraussetzung für die Zahlen dieser Formel das Produkt $\nu\nu^*$ und $\mu\mu^*$ primär, ausserdem ν prim zu μ, ν^* prim zu μ^*.

Dann folgt aus dem übertragenen Satz 36 zunächst:

$$\prod_{(\omega)}{}'\left(\frac{\nu,\ \mu\mu^*}{\mathfrak{w}}\right) = \prod_{(\omega)}{}'\left(\frac{\nu,\ \mu}{\mathfrak{w}}\right)\cdot\Pi'\left(\frac{\nu,\ \mu^*}{\mathfrak{w}}\right) = +1,$$

$$\Pi'\left(\frac{\nu\nu^*,\ \mu^*}{\mathfrak{w}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu,\ \mu^*}{\mathfrak{w}}\right)\cdot\Pi'\left(\frac{\nu^*,\ \mu^*}{\mathfrak{w}}\right) = +1.$$

Also

$$\Pi'\left(\frac{\nu,\ \mu}{\mathfrak{w}}\right) = \Pi'\left(\frac{\nu^*,\ \mu^*}{\mathfrak{w}}\right)$$

oder auch

$$\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\left(\frac{\nu}{\mu}\right) = \left(\frac{\mu^*}{\nu^*}\right)\left(\frac{\nu^*}{\mu^*}\right) \quad \text{S. (3).}$$

Dabei sind ν, μ, ν^*, μ^* als prim zu 2 vorausgesetzt, das Produkt $\prod'$ wird über alle zu 2 primen Primideale $\mathfrak{w}$ von k erstreckt.

§ 10. *Zusammenstellung von cubischen Körpern mit $h = \overline{h} = 2$.*

Für die in der Reid'schen Arbeit angegebenen cubischen Körper mit $h = 2$ sollen in diesem Paragraphen die Klassenkörper zusammengestellt werden und für einen Körper ausführliche Angaben gemacht werden.

1) $x^3 + 4x - 1 = 0$. $= k(\vartheta)$.

$\Delta = -283$, ϑ ist Grundeinheit.

$\vartheta \equiv \vartheta^4$, (2^2) ist eine primäre Einheit.

$k(\sqrt{\vartheta})$ ist der Klassenkörper.

2) $x^3 - 2x - 5 = 0$, $= k(\vartheta)$.

$\Delta = -643$, $\vartheta - 2 = \varepsilon$ ist die Grundeinheit.

$\vartheta + 2 = (3,\ \vartheta + 2)^2 = \mathfrak{p}^2$ ist das $\varepsilon_{\frac{m}{2}}$ der allgemeinen Theorie

$$\varepsilon.\mathfrak{p}^2 = (\vartheta - 2)(\vartheta + 2) = \vartheta^2 - 4 \equiv \vartheta^2, \quad (2^2).$$

Digitized by Google

Also wird hier $k(\sqrt{(\vartheta-2)(\vartheta+2)})$ der Klassenkörper.
Die Zahl 61 zerfällt in $k(\vartheta)$ in 2 Factoren

$$61 = (\vartheta+4)(\vartheta^2-4\vartheta+14).$$

Der Körper k hat 8 Einheitenverbände, die durch

$$\pm 1, \quad \pm(\vartheta-2), \quad \pm(\vartheta+2), \quad \pm(\vartheta-2)(\vartheta+2)$$

definiert werden. Es sind die Restcharactere zu untersuchen nach -1, $\vartheta-2$, $\vartheta+2$.

Es ergiebt sich

$$\left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right) = +1, \quad \left(\frac{\vartheta-2}{\mathfrak{p}}\right) = -1, \quad \left(\frac{\vartheta+2}{\mathfrak{p}}\right) = -1,$$

$$\left(\frac{-1}{\mathfrak{q}}\right) = +1, \quad \left(\frac{\vartheta-2}{\mathfrak{q}}\right) = -1, \quad \left(\frac{\vartheta+2}{\mathfrak{q}}\right) = -1.$$

Dies stimmt damit überein, dass 61 von der Form $4k+1$ ist.

Um kurz auf die Zerlegung der Hauptideale im Körper $K(\sqrt{\omega})$ einzugehen, sei Folgendes ausgeführt: Zunächst ergiebt sich durch einfache Ueberlegungen, dass alle ganzen Zahlen von $K(\sqrt{a})$ in der Form dargestellt sind

$$A = \alpha+\beta\sqrt{\vartheta^2-4},$$

wo α und β ganze Zahlen von k sind.

Sei $\sqrt{\vartheta^2-4} = \xi$ gesetzt, so ergiebt sich z. B.

$$(5) = (5, \xi^3+\xi+2)(5, \xi^3+\xi-2)$$

u. s. w.

3) $x^3+6x-3 = 0 \equiv k(\vartheta)$.
$\Delta = -1107$, $\varepsilon = 1-2\vartheta$, $\mathfrak{p}^2 = 1+2\vartheta$.
$k(\sqrt{(1-2\vartheta)(1+2\vartheta)})$ ist der Klassenkörper.
Ist $\sqrt{(1-2\vartheta)(1+2\vartheta)} = \xi$, so lautet die Gleichung für ξ:

$$\xi^6-3\xi^4+99\xi^2+95 = 0.$$

In der That zerfallen dann alle Hauptideale von $k(\vartheta)$ im $k(\xi)$ in Primfactoren z. B.

$$(11) = (11, \xi^3-2\xi^2+6\xi+2)(11, \xi^3+2\xi^2+6\xi-2).$$

4) $k(\vartheta) \equiv x^3+5x-7 = 0$.
$\Delta = -1823$, $\varepsilon = \vartheta-1$, $\mathfrak{p}^2 = (7, \vartheta+3)^2 = (\vartheta+3)$.
$k(\sqrt{(\vartheta-1)(\vartheta+3)}) = k_2$.
$\xi = \sqrt{(\vartheta-1)(\vartheta+3)}$ genügt der Gleichung

$$\xi^6+9\xi^4+32\xi^3+35 = 0.$$

Digitized by Google

In der That zerfällt z. B. im Körper $k(\xi)$

$$(17) = (17, \xi^3 - \xi^2 + 5\xi + 4)(17, \xi^3 + \xi^2 + 5\xi - 4).$$

5) $x^3 + 7x - 1 = 0 \equiv k(\vartheta)$.
ϑ ist Grundeinheit, $(\vartheta + 1) = \mathfrak{p}^3$.
$k(\sqrt{\vartheta(\vartheta+1)})$ ist der Klassenkörper $= k(\xi)$

$$\xi^6 + 14\xi^4 + 9\xi^2 - 9 = 0.$$

---

6) $k(\vartheta) \equiv x^3 + x - 8 = 0$.
$\Delta = -2^3 \cdot 433$.
$k(\sqrt{(\mathfrak{p}^2)}) = k(\sqrt{(2\vartheta^2 + 4\vartheta + 9)}) = k(\xi)$.

$$\xi^6 - 23\xi^4 - \xi^2 - 9 = 0.$$

$$(7) = (7, \xi^3 - 2\xi^2 + \xi + 3)(7, \xi^3 + 2\xi^2 + \xi - 3).$$
$$(13) = (13, \xi^3 - 5\xi + 3)(13, \xi^3 - 2\xi - 3)$$

u. s. w.

7) $x^3 + x - 9 \equiv 0 \equiv k(\vartheta)$.
$\Delta = -2191$, $\varepsilon = 2 - \vartheta$.
$k(\sqrt{2-\vartheta}) = k(\xi)$.

$$\xi^6 - 6\xi^4 + 13\xi - 1 = 0.$$

Der einfachste cubische Körper mit $h = \overline{h} = 2$ ist der durch

$$x^3 + 4x - 1 = 0$$

definierte $k(\vartheta)$.

$k(\sqrt{\vartheta})$ ist der Klassenkörper.

Alle Sätze über Zerlegung von Hauptidealen im Klassenkörper sind überaus einfach zu bestätigen.

Alle Zahlen von $k(\sqrt{\vartheta})$ sind darstellbar in der Form

$$\alpha + \beta\sqrt{\vartheta} + \gamma\frac{1 + \vartheta\sqrt{\vartheta}}{2}.$$

$\sqrt{\vartheta}$ und $\frac{1 + \vartheta\sqrt{\vartheta}}{2}$ sind adjungierte Basiselemente.

Die Zerlegung beliebiger Zahlen von $k(\vartheta)$ in Ambige des Klassenkörpers gestaltet sich hier sehr übersichtlich.

Z. B. wird

$$2 = (2, \vartheta - 1)(2, \vartheta^2 + \vartheta + 1) = (1 + \sqrt{\vartheta})\lambda,$$

Digitized by Google

wo

$$\lambda = \frac{1+\vartheta+\vartheta^2+(1+\vartheta+\vartheta^2)\sqrt{\vartheta}}{2}$$

ist.

Auch der beim Beweise des Reciprocitätsgesetzes benutzte Hilfssatz über das Zerfallen von Idealquadraten ϱ in ambige Zahlen des Klassenkörpers lässt sich hier in mannigfaltiger Weise bestätigen.

$$(2, \vartheta-1)^3 = -\vartheta+1 = (1+\sqrt{\vartheta})(1-\sqrt{\vartheta}).$$

$1+\sqrt{\vartheta}$ ist sicher eine Ambige, denn

$$\frac{1+\sqrt{\vartheta}}{1-\sqrt{\vartheta}}+\frac{1-\sqrt{\vartheta}}{1+\sqrt{\vartheta}} = \varphi(1\pm\sqrt{\vartheta})$$

erweist sich als eine ganze Zahl in $k(\vartheta)$, somit ist $\frac{1+\sqrt{\vartheta}}{1-\sqrt{\vartheta}}$ eine Einheit E in $k(\sqrt{\vartheta})$, die der Relativgleichung

$$E^2+\varphi^*(\vartheta)E+1 = 0$$

genügt, wo $\varphi^*(\vartheta)$ eine ganze Zahl in $k(\vartheta)$ ist.

Auch für die Bestätigung der Ergänzungssätze bietet der Körper einfaches Material.

Der Körper $k(\vartheta)$ hat 8 Einheitenverbände; es sind die quadratischen Charactere zu untersuchen nach -1, ϑ, $(2\vartheta+1) = \mathfrak{r}^2$.

Z. B. wird

$$17 = (\vartheta+2)(\vartheta^2-2\vartheta+8) = \mathfrak{p}.\mathfrak{q}.$$

$$\left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right) = +1, \quad \left(\frac{\vartheta}{\mathfrak{p}}\right) = +1, \quad \left(\frac{2\vartheta+1}{\mathfrak{p}}\right) = -1.$$

$$\left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right) = +1, \quad \left(\frac{\vartheta}{\mathfrak{q}}\right) = +1, \quad \left(\frac{2\vartheta+1}{\mathfrak{q}}\right) = -1.$$

$$(37) = (37, \vartheta-7)(37, \vartheta^2+7\vartheta+16) = \mathfrak{p}.\mathfrak{q}.$$

$$\mathfrak{p}: +1, \quad +1, \quad -1,$$

$$\mathfrak{q}: +1, \quad +1, \quad -1.$$

$$79 = (4-\vartheta)(\vartheta^2+4\vartheta+20) = \mathfrak{p}.\mathfrak{q}.$$

$$\mathfrak{p}: -1, \quad +1, \quad +1,$$

$$\mathfrak{q}: +1, \quad +1, \quad +1,$$

$\mathfrak{q}$ ist primär, was direkt ersichtlich ist.

$$(73) = (73, \vartheta+5)(73, \vartheta^2-5\vartheta+29) = \mathfrak{p}.\mathfrak{q}.$$

Digitized by Google

$$\mathfrak{p}: +1, \quad +1, \quad +1,$$
$$\mathfrak{q}: +1, \quad +1, \quad +1.$$

Nach der allgemeinen Theorie muss z. B. $(73, \vartheta^3 - 5\vartheta + 29)$ ein Hauptideal werden. In der That wird:

$$(73, \vartheta^3 - 5\vartheta + 29) = (9\vartheta^3 - 8\vartheta + 4) \equiv \vartheta^3, \quad (2^3).$$
$$(53) = (53, \vartheta + 17)(53, \vartheta^3 - 17\vartheta + 28) = \mathfrak{p}.\mathfrak{q}.$$
$$\mathfrak{p}: +1, \quad +1, \quad -1,$$
$$\mathfrak{q}: +1, \quad +1, \quad -1.$$

Die angegebenen Zerlegungen bestätigen augenscheinlich die Frgänzungssätze, auch das Reciprocitätsgesetz kann durch geeignete Kombination von Factoren der Zerlegungen bestätigt werden.

§ 11. *Ein einfach unendliches System von cubischen Körpern mit gerader Klassenanzahl.*

Die Körper, die jetzt untersucht werden sollen, haben die allgemeine Form

$$x^3 - 2^a . x - 1 = 0.$$

Ist a ungerade, so erweist sich wenigstens in den Fällen $a = 3, 5, 7$, die Klassenanzahl h als ungerade. Im Folgenden soll a als gerade angenommen werden, da Zweck der Untersuchung ist, Körper k zu finden, die eine möglichst hohe Potenz von 2 als Factor in ihrer Klassenanzahl haben.

Jedenfalls ist

$$x^3 - 4^e . x - 1 = 0$$

die allgemeine Form der Körper. Der Fall $e = 1$ ist schon untersucht, ist für die folgenden Entwicklungen auch auszuschalten; danach die weitere Annahme $e > 1$. In diesen Körpern $k_e(\vartheta)$ ist ϑ stets eine der beiden Grundeinheiten, ferner wird

$$(\vartheta + 2^e)(\vartheta - 2^e) = \frac{1}{\vartheta},$$

wodurch 2 weitere Einheiten gewonnen sind.

1) ϑ und $\vartheta - 2^e$ sind beide in $k^{(1)}$ positiv, in $k^{(2)}$ und $k^{(3)}$ negativ, woraus folgt, dass $\vartheta + 2^e$ eine total positive Einheit ist.

2) $\vartheta + 2^e$ ist primär, denn ϑ ist primär.

$$\vartheta + 2^e \equiv \vartheta^4, \quad (2^3), \qquad \vartheta + 2^e \text{ ist } \gtrless \varepsilon^3.$$

Digitized by Google

3) Hätte nun etwa ein Körper $k_e(\vartheta)$ ungerade Klassenanzahl $h = 2k+1$, so existierte ein unverzweigter relativ-quadratischer Körper $k(\sqrt{\vartheta+2^e})$, der durch eine total positive primäre Einheit definiert ist, was nach den früheren Entwicklungen unmöglich ist.

Daraus resultiert der ganz allgemeine Satz:

„Alle cubischen Körper $k_e(\vartheta) \equiv x^3 - 4^e x - 1 = 0$ $(e > 1)$ haben eine mindestens durch 2 teilbare Klassenanzahl."

Es lassen sich übrigens sehr einfach alle Körper $k_e(\vartheta)$ angeben, welche eine durch 4 teilbare Klassenanzahl haben. Es gilt;

„Für gerades e ist stets h durch 4 teilbar."

Einfach ist der Körper

$$x^3 - 16x - 1 = 0, \quad e = 2$$

zu behandeln.

In Uebereinstimmung mit dem allgemeinen Satz erweist sich $h = 4$, $\bar{h} = 8$, da $s - p = 1$ ist. (ϑ und $\vartheta - 4$ sind positiv und haben Normen $= +1$).

Nach dem allgemeinen Hilbert'schen Satz existieren 3 unverzweigte relativ-quadratische Körper, in der That ist dies hier der Fall. Die 3 Körper sind $k(\sqrt{\vartheta})$, $k(\sqrt{\vartheta-4})$, $k(\sqrt{\vartheta+4})$; durch geeignete Zusammensetzung lässt sich der Klassenkörper darstellen.

Im Anschluss hieran sollen noch einige Körper mit möglichst hoher Klassenanzahl angegeben werden.

1) $k(\vartheta) \equiv x^3 + 16x - 1 = 0$, $\Delta = -16411 \neq p^2 a$ hat $h = 8$; die Bestimmung von h gelingt hier überraschend einfach, soll aber nicht dargestellt werden, weil die umfangreichen Zahlenrechnungen zu viel Raum beanspruchen, ohne etwas Wesentliches für die Methode zu bieten.

2) $x^3 + 256x - 1 = 0$, $\Delta = -67108891 \neq p^2 a$. ϑ^2, ϑ, 1 ist die Basis, $\vartheta \equiv x$ ist Grundeinheit. $h = 8$.

$k(\sqrt{\vartheta})$ ist unverzweigt, $k\left(\sqrt{1+16\sqrt{\vartheta}}\right)$ oder $k\left(\sqrt{1-16\sqrt{\vartheta}}\right)$ ist unverzweigt. Der Klassenkörper K_1 ist relativ-cyclisch vom Relativgrade 8 und zwar in beiden Fällen.

$k_1 \equiv x^3 + 16x - 1 = 0$ hat die beiden unverzweigten Körper $k(\sqrt{\vartheta})$, $k\left(\sqrt{1 \pm 4\sqrt{\vartheta}}\right)$ der Klassenkörper wird dann als relativ-quadratischer unverzweigter Körper zu $k\left(\sqrt{1+4\sqrt{\vartheta}}\right)$ zu konstruieren sein.

Digitized by Google

Zum Schluss sollen noch einige Bemerkungen über die Ergänzungssätze im Falle $h = \overline{h} = 4$ folgen. Körpermaterial für $h = \overline{h} = 4$ liefern gewisse quadratische Körper $k(\sqrt{-17})$, $k(\sqrt{-14})$ u. s. w.

Vorausgesetzt wird hier, dass die Klassenanordnung in $k(\vartheta)$ cyclisch ist, d. h. dass C, C^2, C^3, $C^4 = 1$, die 4 Klassen von k darstellen. Dann sagt der allgemeine Hilbert'sche Satz aus, dass der Klassenkörper relativ-cylisch vom Relativgrade 4 ist und nur einen unverzweigten relativ-quadratischen Körper zu k zum Unterkörper hat.

Im Falle, dass die Klassen von k angeordnet sind, C_1, C_2, $C_1 C_2 = C_3$, $C_1^2 = 1$, $C_2^2 = 1$ gestaltet sich die Untersuchung wesentlich complicierter; es existieren dann 3 unverzweigte relativ-quadratische Körper mit Bezug auf k, die Unterkörper des Klassenkörpers sind. $(x^3 - 16x - 1 = 0)$ hat diese Anordnung der Klassen.

Um für den cyclischen Fall die Ergänzungssätze aufzustellen, muss man wiederum den Klassenkörper zu Hilfe ziehen. Es resultiert dann folgende Fassung.

„Wenn ein Ideal eines Körpers k mit $h = \overline{h} = 4$ und cyclischer Klassenanordnung die Bedingungen erfüllt

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\mathfrak{p}}\right) = +1, \quad \ldots \quad \left(\frac{\varepsilon_{\frac{m+s}{2}-1}}{\mathfrak{p}}\right) = +1, \quad \left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right) = +1,$$

$\left(\frac{\lambda_i}{\mathfrak{p}}\right) = +1$, wo λ_i das Quadrat eines Ideals der Klasse $C_2 = C^2$ ist, so heisse das Ideal primär."

Die Definition der primären Zahl behält die alte Form. Dann sagt der 1. Ergänzungssatz aus, dass jedem primären Ideal $\mathfrak{p}$ eine Primärzahl π zugeordnet ist, sodass $(\pi) = \mathfrak{p}$ wird.

Insbesondere ergiebt sich hier für $\mathfrak{p}$ die Bedingung Hauptideal zu sein und zwar ein solches, das nicht Quadrat eines Ideals von $C_2 = C^2$ ist.

Die Beweismethode ist dieselbe wie im Falle $h = \overline{h} = 2$.

Um die Ergänzungssätze für den Fall Abel'scher Klassenanordnung zu beweisen bedarf es scheinbar einer ausführlichen Theorie des relativ-Abel'schen Körpers.

Zum Schlusse erfülle ich die angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer Herrn Prof. D. Hilbert für seine Anregung und seinen fördernden Rat meinen herzlichen Dank auszusprechen.

Digitized by Google

Lebenslauf.

Ich, Gottfried Martin Rückle, bin geboren am 7. Juni 1879 in Rödelheim bei Frankfurt a. M. Besuchte bis Ostern 1895 die Realschule zu Bockenheim, danach das Realgymnasium Wöhlerschule zu Frankfurt a. M., das ich Herbst 1897 mit dem Zeugnis der Reife verliess. Von Michaelis 1897 ab studierte ich in Göttingen Mathematik und Naturwissenschaften.

Ich hörte Vorlesungen bei den Herren: Baumann, Brendel, Hilbert, Klein, v. Koenen, Müller, Riecke, Schoenflies, Voigt, Wallach, Wiechert, Zermelo.

Allen meinen verehrten Lehrern, insbesondere den Herren D. Hilbert und F. Klein spreche ich für die Anregungen, die sie mir boten, meinen besten Dank aus.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google